

# Ein Beitrag zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme entlang der Produktlebensphasen

Am Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur  
Erlangung des Grades eines  
**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**  
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Christoph Tamm**

aus Mainz

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Reiner Anderl
Tag der Einreichung:	21. Januar 2020
Tag der mündlichen Prüfung:	21. April 2020

Darmstadt 2021

D17

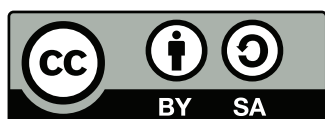
Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-177571

URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/17757>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von TUprints, dem Publikationsservice der Technischen Universität Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>



Diese Veröffentlichung ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF in Darmstadt.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz für die Betreuung und Begleitung der Arbeit. Prof. Dr.-Ing. Reiner Anderl danke ich für das Interesse am Thema, die Übernahme des Korreferats und die konstruktive Korrektur. Weiterhin möchte ich mich herzlich bei Dr.-Ing. Sven Herold, Heiko Atzrodt und Prof. Dr.-Ing. Thilo Bein für die inhaltliche Ausrichtung, die thematische Eingrenzung und die organisatorische Unterstützung bedanken.

Meinen Kolleginnen und Kollegen des Bereichs Adaptronik danke ich für die freundschaftliche Zusammenarbeit, die Hilfsbereitschaft und die kreative Arbeitsatmosphäre. Dabei wird mir die gemeinsame Zeit mit meinem Fachteam (Sara Perfetto, Daria Manushyna, Marvin Droste, Rafael Pilotto), dem Team HyTest (Jan Hansmann, Jonathan Millitzer), meinen Bürokollegen (Thomas Pfeiffer, Tim Bastian Klaus, Simon Kupjetz) und den Kolleginnen und Kollegen der Gruppe Numerische Methoden und Analysen (Matthias Kurch, Timo Jungblut, Jenny Pöllmann, Georg Stoll, Christopher Ranisch, Moritz Hülsebrock, Hendrik Holzmann, Necati Mercan, Timo Potrafke, Florian Richter, Svenja Szczuka, Patrick Aulbach-Pries) in ganz besonderer Erinnerung bleiben.

Schließlich möchte ich meinen Eltern und meinem Bruder danken, die an mich geglaubt, mich unterstützt und dabei nie zu viel erwartet haben. Der allergrößte Dank gebührt jedoch meiner Frau Nora für ihre Liebe, ihre Unterstützung und ihren Rückhalt während der letzten Jahre. Ohne sie hätte ich diese Arbeit niemals zu Ende bringen können. Ihr und unseren Töchtern Juno und Tula ist diese Arbeit gewidmet.





# Zusammenfassung

Die digitale Transformation kennzeichnet sich durch drei zentrale Eigenschaften. Die Vernetzung von Menschen und Dingen, die Virtualisierung von Produkten und Prozessen sowie der Austausch von Daten und Wissen. Wesentliche Technologien der Digitalisierung sind die Sensorik und Aktorik, welche die Schnittstelle zwischen realer und virtueller Welt darstellen, die Kommunikation und die Transformation von Daten in Wissen. Autonome und cyber-physische Systeme vereinigen diese Technologiebereiche im Rahmen von Industrie 4.0 unter Verwendung von bereits existierenden mechatronischen Komponenten.

Viele der wissenschaftlichen und technologischen Fortschritte im Bereich der digitalen Transformation fokussieren sich gegenwärtig auf den virtuellen Raum. Es werden digitale Abbilder der physikalischen Welt entwickelt welche reale und virtuelle Informationen von Prozessen, Produkten oder Dienstleistungen verarbeiten. Physische Dinge werden mit digitalen Diensten zu hybriden, zugleich digitalen und physikalischen Produkten kombiniert. Entlang der gesamten Wertschöpfungskette revolutioniert die digitale Transformation Abläufe und trägt zu einer nahtlosen Verknüpfung der einzelnen Prozessschritte bei. Dies verkürzt Entwicklungszeiten, reduziert Iterationen, minimiert Fehler und eröffnet zudem den Zugang zu neuen datenbasierten Geschäftsmodellen. Um die volle Leistungsfähigkeit der digitalen Technologien auszuschöpfen, müssen Systeme künftig nicht nur miteinander vernetzt sein, sondern zudem smarte Eigenschaften besitzen. Aktuelle Forschungsthemen umfassen dabei die Adaption auf äußere Bedingungen und die autonome Selbstoptimierung dynamischer Systemeigenschaften.

Zur Entwicklung dieser Systeme benötigt es eine leistungsfähige, effiziente Entwicklungsumgebung, mithilfe derer parametrische und echtzeitfähige Modelle über die gesamte Wertschöpfungskette realisiert werden können. Ziel der Arbeit ist die Entwicklung und Validierung einer Methode zur parametrischen Beschreibung strukturdynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen entlang der Produktlebensphasen. Das vorgeschlagene Vorgehen leistet einen Beitrag zur zuverlässigen Nachverfolgbarkeit und einfachen Aktualisierung von Daten und Modellen über den gesamten Lebenszyklus eines Produktes. Die durchgängige Nutzung der parametrischen und echtzeitfähigen Modelle von der Planung über die Auslegung bis hin zur Zustandskontrolle im Betrieb steht dabei im Fokus der Arbeit.

Ausgehend von der modellbasierten Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme (V-Modell) wird eine erweiterte strukturierte Methode zur parametrischen

Modellbildung strukturdynamischer Systeme entwickelt, die in einem integrativen und domänenübergreifenden Systementwurf Anwendung finden kann. Die Methodenentwicklung baut dabei auf numerischen Standardverfahren (Finite-Elemente-Methode und Modellordnungsreduktion) aus dem Auslegungsprozess mechanischer Strukturen auf und lässt sich somit problemlos in bestehende Entwicklungsprozesse integrieren. Die parametrischen Beschreibungen der Teilsysteme ermöglichen es, konstruktive Parameter in einer variablen hybriden (numerischen und experimentellen) Entwicklungsumgebung systematisch zu untersuchen und zu bewerten. Weiterhin sollen Über- und Unterdimensionierung vermieden, Iterationen verringert und Entwicklungszeiten sowie -kosten gesenkt werden. Ein Mehrwert zu den aus der Literatur bekannten Ansätzen wird durch die durchgängige parametrische Modellbildung dynamischer Systeme von der Konzept- bis in die Betriebsphase geschaffen. Mithilfe der vorgestellten Methodik und auf Basis der entwickelten virtuellen Modelle können hybride, zugleich digitale und physische Systeme mit smarten Eigenschaften konzipiert und ausgelegt werden. Im Bereich der Schwingungstechnik erweitert die Kombination aus Echtzeitfähigkeit und Parametrierbarkeit der Modelle zur Simulationslaufzeit den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft und Technik.

Die Entwicklung der Methodik wird am Beispiel eines eingespannten Balkens durchgeführt und auf den komplexeren Anwendungsfall einer hochdynamischen Versuchsumgebung übertragen. Anhand möglicher Anwendungsszenarien, die sich im Kontext der Digitalisierung ergeben, wird die Leistungsfähigkeit der Entwicklungsumgebung untersucht und bewertet. Zunächst wird die Anwendung parametrischer Modelle im Auslegungs- und Optimierungsprozess von Komponenten und Systemen analysiert. Dabei stehen zeit- und ressourceneffiziente Machbarkeits- und Sensitivitätsanalysen sowie Entwurfsraumbewertungen im Fokus. Abschließend werden die parametrischen Strukturmodelle experimentell validiert und die Tauglichkeit zur Verwendung als virtuelle Sensorik und für einen Online-Modellabgleich bewertet.

# Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
Zusammenfassung	iii
Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xiii
Formelzeichenverzeichnis	xv
Abkürzungsverzeichnis	xix
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Ziel und Gliederung der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Stand der Wissenschaft</b>	<b>7</b>
2.1 Modellbasierte Systementwicklung . . . . .	7
2.1.1 Vorgehensmodelle . . . . .	7
2.1.2 Modellbasiertes Systems Engineering . . . . .	9
2.1.3 Phasen der modellbasierten Entwicklung . . . . .	10
2.2 Ganzheitliche Systemsimulation . . . . .	13
2.3 Echtzeitsimulation . . . . .	16
2.4 Digitale Transformation . . . . .	17
<b>3 Systemtheoretische Grundlagen</b>	<b>21</b>
3.1 Beschreibung linearer dynamischer Systeme . . . . .	21
3.2 Übertragungsverhalten . . . . .	23
3.3 Eigenschaften dynamischer Systeme . . . . .	24
3.3.1 Stabilität . . . . .	24
3.3.2 Passivität . . . . .	25
3.3.3 Steuerbarkeit . . . . .	25
3.3.4 Beobachtbarkeit . . . . .	26
3.4 Gütekriterien und Normen . . . . .	26
3.4.1 Systemnormen . . . . .	27
3.4.2 Gütekriterien zur Modellvalidierung . . . . .	28

<b>4</b>	<b>Grundlagen der Modellordnungsreduktion</b>	<b>31</b>
4.1	Grundprinzipien projektiver Verfahren . . . . .	33
4.2	Projektive nicht-parametrische Verfahren . . . . .	34
4.2.1	Statische Kondensation . . . . .	37
4.2.2	Modales Abschneiden . . . . .	38
4.2.3	Component Mode Synthesis . . . . .	39
4.2.4	Krylov-Unterraumverfahren . . . . .	41
4.2.5	Balanciertes Abschneiden . . . . .	42
4.3	Parametrische Modellordnungsreduktion . . . . .	43
4.3.1	Literaturübersicht . . . . .	43
4.3.2	Grundprinzipien . . . . .	47
4.4	Zusammenfassung und Handlungsbedarf . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Methodik zur parametrischen Modellbildung</b>	<b>49</b>
5.1	Anforderungen . . . . .	49
5.2	Methodik und Ablauf . . . . .	50
5.2.1	Parametrische Component Mode Synthesis . . . . .	50
5.2.2	Interpolation lokaler ordnungsreduzierter Modelle . . . . .	53
5.2.3	Synthese der Substrukturen . . . . .	55
5.2.4	Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade . . . . .	57
5.2.5	Parametrierung . . . . .	58
5.3	Parametereinfluss und numerische Umsetzung . . . . .	60
5.3.1	Dichte . . . . .	62
5.3.2	Elastizitätsmodul . . . . .	63
5.3.3	Dämpfung . . . . .	63
5.3.4	Schalendicke . . . . .	65
5.4	Integration in die modellbasierte Systementwicklung . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Numerische Untersuchungen und experimentelle Validierung</b>	<b>69</b>
6.1	Beidseitig eingespannter Biegebalken . . . . .	69
6.1.1	Modellbildung . . . . .	69
6.1.2	Einfluss der Modellparameter . . . . .	71
6.2	Strukturoptimierung . . . . .	76
6.2.1	Aufgabenstellung . . . . .	76
6.2.2	Numerische Optimierung . . . . .	79
6.2.3	Bewertung und Diskussion der numerischen Untersuchungen . . . . .	83
6.3	Experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells . . . . .	86
6.3.1	Versuchsaufbau . . . . .	86
6.3.2	Parametrisches Balkenmodell . . . . .	87
6.3.3	Modellabgleich und Modellaktualisierung . . . . .	89
6.3.4	Bewertung und Diskussion der experimentellen Validierung . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Anwendung und Bewertung der entwickelten Methode</b>	<b>95</b>
7.1	Strukturdynamische Analyse und Optimierung eines Federbeindoms . . . . .	95
7.1.1	Ausgangsmodell und Randbedingungen . . . . .	95
7.1.2	Optimierung des strukturmechanischen Verhaltens . . . . .	99

7.1.3	Vergleich Referenz- und optimierte Struktur . . . . .	100
7.1.4	Bewertung und Diskussion . . . . .	102
7.2	Virtuelle Sensorik in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung . . .	103
7.2.1	Versuchseinrichtung . . . . .	103
7.2.2	Aufbau und Aufgabenstellung . . . . .	104
7.2.3	Modell der Versuchseinrichtung . . . . .	106
7.2.4	Virtuelle Sensorik . . . . .	108
7.2.5	Bewertung und Diskussion . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Systemmatrizen der Component Mode Synthesis</b>	<b>117</b>
A.1	Matrizen einer Substruktur . . . . .	117
A.2	Matrizen des synthetisierten Gesamtsystems . . . . .	118
A.3	Projektionsvorschriften zur Ordnungsreduktion der Koppelfreiheitsgrade	119
<b>B</b>	<b>Simulink-Modell der hoch-dynamischen Versuchseinrichtung</b>	<b>121</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	V-Modell als Makrozyklus . . . . .	8
2.2	Erweitertes V-Modell für MBSE-Anwendungen . . . . .	10
2.3	Übersicht Modellbildung dynamischer Systeme . . . . .	14
3.1	Grafische Verfahren zum Vergleich dynamischer Systeme . . . . .	28
a	Modal Assurance Criterion . . . . .	28
b	Bode-Diagramm . . . . .	28
4.1	Ablauf der Modellordnungsreduktion . . . . .	32
4.2	Projektion der Systemmatrizen . . . . .	34
4.3	Vergleich MOR/PMOR . . . . .	44
a	Optimierung ohne PROM . . . . .	44
b	Optimierung mit PROM . . . . .	44
4.4	Ablauf Parametrierung mit interpolationsbasierten Methoden . . . . .	45
5.1	Gewichtungsfunktion zwischen zwei Parametersets . . . . .	55
5.2	Parametrische Modellbildung strukturdynamischer Systeme . . . . .	59
a	Finite-Elemente-Modell . . . . .	59
b	Aufteilung in Substrukturen . . . . .	59
c	Aufbau lokaler ordnungsreduzierter Modelle . . . . .	59
d	Synthese und Reduktion der Koppelfreiheitsgrade . . . . .	59
5.3	Simulink-Block eines parametrischen linearen Systems . . . . .	60
a	Standard-Block . . . . .	60
b	Erweiterter Block mit zusätzlichen Systemeingängen . . . . .	60
5.4	Modell einer rechteckigen Platte . . . . .	62
a	FE-Modell . . . . .	62
b	Erste Eigenmode ( $f_1 = 67.9$ Hz) . . . . .	62
c	Zweite Eigenmode ( $f_2 = 164.6$ Hz) . . . . .	62
d	Dritte Eigenmode ( $f_3 = 206.2$ Hz) . . . . .	62
5.5	Auswirkung der Variation der Dichte . . . . .	63
a	Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung . . . . .	63
b	MAC-Vergleich . . . . .	63
5.6	Auswirkung der Variation des Elastizitätsmoduls . . . . .	64
a	Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung . . . . .	64
b	MAC-Vergleich . . . . .	64
5.7	Übertragungsverhalten; Variation der Rayleigh-Dämpfungsbeiwerte . . . . .	64

a	Variation des massenproportionalen Dämpfungsbeiwerts $\alpha$ . . .	64
b	Variation des steifigkeitsproportionalen Dämpfungsbeiwerts $\beta$ . . .	64
5.8	Auswirkung der Variation der Plattendicke . . . . .	65
a	Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung . . . . .	65
b	MAC-Vergleich . . . . .	65
5.9	Ablaufdiagramm der Modellbildung . . . . .	66
5.10	Integration in die modellbasierte Systementwicklung . . . . .	67
6.1	Beidseitig eingespannter Biegebalken . . . . .	69
a	3-D-Darstellung . . . . .	69
b	Skizze . . . . .	69
6.2	FE-Modell des Biegebalkens . . . . .	70
6.3	Ersten beiden Eigenmoden des beidseitig eingespannten Biegebalkens . . . . .	71
a	Mode 1 . . . . .	71
b	Mode 2 . . . . .	71
6.4	Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung . . . . .	71
6.5	Relativer Fehler des Amplitudengangs (CMS-Moden) . . . . .	72
6.6	Relativer Fehler der Eigenfrequenzen (CMS-Moden) . . . . .	73
a	Erste bis vierte Eigenfrequenz . . . . .	73
b	Fünfte bis achte Eigenfrequenz . . . . .	73
6.7	Relativer Fehler der Eigenfrequenzen (lokale ROM) . . . . .	74
a	Erste bis vierte Eigenfrequenz . . . . .	74
b	Fünfte bis achte Eigenfrequenz . . . . .	74
6.8	Relativer Fehler des Amplitudengangs . . . . .	75
6.9	Mittlerer relativer Fehler des Amplitudengangs . . . . .	76
6.10	Verschiebungen, Biegemomente und Querkräfte . . . . .	77
6.11	Vergleich der Biegelinie (analytisch und Differenzenformel) . . . . .	78
6.12	Statische Verformung des Biegebalkens aus der FE-Analyse . . . . .	79
6.13	Verlauf der Designvariablen des Simulated Annealings . . . . .	81
a	Verlauf der Designvariablen (Dicke der Balkensegmente) . . . . .	81
b	Verlauf der Zielgröße (maximale Durchbiegung des Balkens) . . . . .	81
6.14	Zwischenergebnisse der FE-Optimierung mittels ANSYS Workbench . . . . .	83
a	Lokale Sensitivitäten der Designparameter . . . . .	83
b	3D-Darstellung der Antwortfläche . . . . .	83
6.15	Statische Verformung des Biegebalkens (Vergleich optimierte Lösungen) . . . . .	83
6.16	Statische Verformung des Biegebalkens (FE-Analyse) . . . . .	85
6.17	Versuchsaufbau . . . . .	87
a	Beidseitig eingespannter Biegebalken . . . . .	87
b	Einspannung . . . . .	87
c	Zusatzmasse . . . . .	87
6.18	Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus . . . . .	88
6.19	Vergleich gemessenes Übertragungsverhalten . . . . .	89
6.20	Zeitbereichssimulation in Simulink . . . . .	89
6.21	Vergleich Messung und Simulation im Zeitbereich (Gesamt) . . . . .	90
6.22	Vergleich Messung und Simulation im Zeitbereich (Abschnitte) . . . . .	91



a	Abschnitt I . . . . .	91
b	Abschnitt II . . . . .	91
c	Abschnitt III . . . . .	91
6.23	Materialparameter Dichte der einzelnen Substrukturen . . . . .	92
6.24	Vergleich Messung und Simulation im Frequenzbereich (ohne Masse) .	93
6.25	Vergleich Messung und Simulation im Frequenzbereich (mit Masse) .	94
7.1	Ausgangsmodell des Federbeindoms aus einem Serienfahrzeug . . . . .	96
7.2	Verlauf der Eigenfrequenzen des Federbeindoms . . . . .	99
7.3	CAD-Modell des Federbeindoms mit optimierter Materialauswahl . .	101
7.4	FE-Modell des Federbeindoms . . . . .	102
a	FE-Netz des Federbeindoms . . . . .	102
b	Eigenmode $f = 333$ Hz . . . . .	102
7.5	Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung am Federbeindom	102
7.6	Hochdynamische Versuchseinrichtung . . . . .	103
7.7	Schematische Darstellung der hochdynamische Versuchseinrichtung .	105
7.8	Simulink-Modell der hochdynamische Versuchseinrichtung . . . . .	106
7.9	Modelle des Versuchsobjekts . . . . .	107
a	Modell für die numerische Voruntersuchung . . . . .	107
b	FE-Modell des Versuchsobjekts . . . . .	107
7.10	Einfluss der Adapter-Masse auf das Versuchsergebnis . . . . .	107
a	Gesamtansicht . . . . .	107
b	Detailansicht . . . . .	107
7.11	Vergleich dynamische Steifigkeit . . . . .	108
7.12	Vergleich FRF am Versuchsobjekt (gemessen, korrigiert) . . . . .	109
7.13	Vergleich FRF am Versuchsobjekt (korrigiert, virtueller Sensor) . . .	110
B.1	Simulink-Modell der Versuchseinrichtung . . . . .	121



# Tabellenverzeichnis

6.1	Abmessungen des Biegebalkens . . . . .	70
6.2	Vergleich $H_2$ -Normen in Abhängigkeit der Stützstellen-Abstände . . .	74
6.3	Ergebnisse der Optimierung . . . . .	84
6.4	Resultierende Werte der Designvariablen nach der Optimierung . . .	84
6.5	Berechnungszeiten und relativer Fehler der Berechnungsergebnisse . .	85
6.6	Vergleich $H_2$ -Normen Messung und Simulation ( $x = 480$ mm) . . . .	93
7.1	Überblick Komponenten des vereinfachten Federbeindoms . . . . .	97
7.2	Überblick Schnittstellen zwischen Komponenten des Federbeindoms .	98
7.3	Vergleich der Berechnungszeiten Federbeindom . . . . .	98
7.4	Auszug aus für die Optimierung verwendeten Materialien . . . . .	100
7.5	Vergleich Eigenschaften Ausgangs- und optimierter Variante . . . .	101
B.1	Simulationsparameter des Simulink-Modells . . . . .	122



# Formelzeichenverzeichnis

$c_{dyn}$	dynamische Steifigkeit
$e$	relativer Fehler
$f$	Frequenz
$h$	Schalendicke
$i$	Laufvariable
$j$	imaginäre Einheit
$k$	diskreter Zeitschritt
$k_e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$m$	Masse
$m_e$	Elementmassenmatrix
$m_i$	i-tes Moment einer Übertragungsfunktion
$n$	Systemordnung
$p$	Systemparameter
$q$	Systemzustand der Bewegungsgleichung 2. Ordnung
$\dot{q}$	erste Ableitung von $q$ nach der Zeit
$\ddot{q}$	zweite Ableitung von $q$ nach der Zeit
$r$	reduzierte Systemordnung
$r_{rt}$	Echtzeitkoeffizient
$s_i$	i-ter Pol einer Übertragungsfunktion
$s$	komplexer Frequenzparameter
$t$	Zeit
$t_l$	Durchlaufzeit
$t_s$	Abtastintervall
$w$	Systemzustand im ordnungsred. System
$\dot{w}$	erste Ableitung von $w$ nach der Zeit
$\ddot{w}$	zweite Ableitung von $w$ nach der Zeit
$x$	Systemzustand des Zustandsraums
$\dot{x}$	erste Ableitung von $x$ nach der Zeit
$\mathbf{f}$	Vektor der Volumenlasten
$\mathbf{p}$	Vektor der Systemparameter
$\mathbf{q}$	Zustandsvektor des Bewegungsgleichungssystems 2. Ordnung
$\dot{\mathbf{q}}$	erste Ableitung von $\mathbf{q}$ nach der Zeit
$\ddot{\mathbf{q}}$	zweite Ableitung von $\mathbf{q}$ nach der Zeit
$\mathbf{u}$	Eingangsvektor
$\mathbf{v}$	Eigenvektor

$\mathbf{w}$	Zustandsvektor der ordnungsred. Bewegungsgleichung
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor des Zustandsraums
$\mathbf{y}$	Ausgangsvektor
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Kraft
$H_2$	Norm
$T$	Abtastzeit
$T_{start,min}$	Pseudotemperaturen
$\mathbf{B}$	Dämpfungsmatrix
$\mathbf{B}^{in}$	Eingangsmatrix
$\mathbf{B}^{out}$	Ausgangsmatrix
$\mathbf{B}_a$	Ableitungen der Ansatzfunktionen
$\mathbf{C}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{D}$	Differentiationsmatrix
$\mathbf{E}$	Hookesche Matrix
$\mathbf{F}$	Äußerer Lastvektor
$\mathbf{H}$	Matrix der Übertragungsfunktionen
$\mathbf{I}$	Identitätsmatrix
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$\mathbf{N}_a$	Ansatzfunktionen
$\mathbf{Q}(s)$	Laplace-Transformierte des Vektors $\mathbf{q}(t)$
$\mathbf{U}(s)$	Laplace-Transformierte des Vektors $\mathbf{u}(t)$
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{W}_c$	Steuerbarkeitsmatrix
$\mathbf{W}_o$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbf{Y}(s)$	Laplace-Transformierte des Vektors $\mathbf{y}(t)$
$\tilde{\mathbf{A}}$	Systemmatrix
$\tilde{\mathbf{B}}$	Steuermatrix
$\tilde{\mathbf{C}}$	Beobachtungsmatrix
$\tilde{\mathbf{D}}$	Durchgangsmatrix
$\bar{\mathbf{B}}$	ordnungsred. Dämpfungsmatrix
$\bar{\mathbf{B}}^{in}$	ordnungsred. Eingangsmatrix
$\bar{\mathbf{B}}^{out}$	ordnungsred. Ausgangsmatrix
$\bar{\mathbf{C}}$	ordnungsred. Steifigkeitsmatrix
$\bar{\mathbf{M}}$	ordnungsred. Massenmatrix
$\hat{\mathbf{B}}$	ordnungsred. Dämpfungsmatrix mit red. Koppelfreiheitsgraden
$\hat{\mathbf{C}}$	ordnungsred. Steifigkeitsmatrix mit red. Koppelfreiheitsgraden
$\hat{\mathbf{M}}$	ordnungsred. Massenmatrix mit red. Koppelfreiheitsgraden
$\check{\mathbf{C}}$	erste Systemmatrix im Krylov-Unterraum
$\check{\mathbf{G}}$	zweite Systemmatrix im Krylov-Unterraum
$\check{\mathbf{B}}$	Steuermatrix im Krylov-Unterraum
$\check{\mathbf{L}}$	Beobachtungsmatrix im Krylov-Unterraum

$\alpha$	Rayleigh-Dämpfungsbeiwert
$\beta$	Rayleigh-Dämpfungsbeiwert
$\delta$	relativer Fehler
$\delta_i$	i-ter Abklingkoeffizient
$\epsilon$	Approximationsfehler
$\underline{\epsilon}$	Verzerrungsvektor
$\vartheta$	Lehrsches Dämpfungsmaß
$\lambda$	Eigenwert
$\mu$	Stützstellen-Abstand
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\rho$	Dichte
$\rho_k^s$	Gewichtungsfunktion
$\sigma$	Hankel-Singulärwert
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor
$\tau$	Integrationsvariable
$\omega_0$	Eigenkreisfrequenz
$\omega_i$	i-te Eigenkreisfrequenz
$\Delta$	Differenz
$\Phi_i$	i-ter Eigenvektor eines dynamischen Systems
$\underline{\epsilon}$	Vektor der Verzerrungen
$\bar{\Phi}$	reduzierte Modalmatrix
$\Psi$	Zwangsdeformationen
$\mathcal{L}$	Laplace-Transformation
Re	Realteil einer komplexen Zahl
$\ \cdot\ _h$	Hankel-Norm
$f(t)$	Funktion im Zeitbereich
$F(s)$	Funktion im Frequenzbereich
$(\cdot)^s$	Matrizen und Vektoren einer Substruktur
$(\cdot)^H$	hermitesche Matrix
$(\cdot)_d$	Matrizen des zeitdiskreten Systems
$(\cdot)_i$	innere Freiheitsgrade
$(\cdot)_m$	Master-Freiheitsgrade





# Abkürzungsverzeichnis

BEM	Randelementmethode (engl.: Boundary Element Method)
CAD	Rechnerunterstütztes Konstruieren (engl.: Computer-aided Design)
CMS	Component Mode Synthesis
DGL	Differentialgleichung
DOE	Statistische Versuchsplanung (engl.: Design of Experiments)
FEM	Finite-Elemente-Methode
FOM	Unreduziertes Finite-Elemente-Modell (engl.: Full Order Model)
FRF	Frequenzgang (engl.: Frequency Response Function)
HIL	Hardware-in-the-loop
ITK	Informations- und Kommunikationstechnik
MA	Modalanalyse
MAC	Modal Assurance Criterion
MBSE	Modellbasiertes Systems Engineering
MKS	Mehrkörpersimulation
MOGA	Multi-objective Genetic Algorithm
MOR	Modellordnungsreduktion
PEP	Produktentwicklungsprozess
PMOR	Parametrische Modellordnungsreduktion
POD	Proper Orthogonal Decomposition
PROM	Parametrisches ordnungsreduziertes Modell (engl.: Parametric Reduced Order Model)
ROM	Ordnungsreduziertes Modell (engl.: Reduced Order Model)
SE	Systems Engineering
VDI	Verein Deutscher Ingenieure



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die mathematische Modellbildung und die Simulation von mechanischen Strukturen sind grundlegende Schritte in der Entwicklung technischer Systeme. Bei der Beschreibung dieser Systeme lassen sich mit Hilfe physikalischer Grundgesetze Bilanzgleichungen für Energien, Massen und Impulse herleiten, deren Formulierungen in der Regel auf gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL) führen. Die DGL werden üblicherweise durch analytische oder numerische Verfahren erzeugt und können mit verschiedenen Algorithmen gelöst werden. Der allgemeine Ansatz zur rechnergestützten Lösung von DGL höherer Ordnung beinhaltet die Transformation in DGL-Systeme erster Ordnung. Hierdurch erhöht sich die Dimension der Systemmatrizen proportional zur Anzahl der Ableitungen, wobei sich die Ordnung des DGL-Systems auf eins reduziert. Diese transformierte Darstellung ist für die numerische Analyse mittels moderner Computertechnik sehr gut geeignet und kann effizient gelöst werden.

In der Praxis entstehen bei der Modellbildung dynamischer Systeme häufig DGL-Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden (FOM<sup>1</sup>). Insbesondere gilt dies für numerische Diskretisierungsmethoden, wie beispielsweise die Finite-Elemente-Methode (FEM). Diese erlaubt eine detaillierte Modellierung und Analyse verbunden mit hohem Rechenaufwand. Dadurch sind FOM unattraktiv für Optimierungsaufgaben oder Zeitbereichssimulationen. Modelle mit annähernd gleichbleibender Genauigkeit und erheblich größerer Recheneffizienz werden häufig durch nachgelagerte Verfahren zur Modellordnungsreduktion (MOR) erzeugt. Diese bilden das Ein- und Ausgangsverhalten eines dynamischen Systems in einem definierten Zeit- oder Frequenzbereich mit einer geringeren Anzahl von Freiheitsgraden ab. Der Begriff *Ordnung* in der Modellordnungsreduktion beschreibt hierbei die Dimension der Systemmatrizen und nicht die höchste vorkommende Ableitungsordnung der DGL.

In der Schwingungstechnik kommen ordnungsreduzierte Modelle (ROM<sup>2</sup>) häufig beim Reglerentwurf für mechatronische oder adaptronische Systeme zum Einsatz.

---

<sup>1</sup>Englisch: Full Order Model.

<sup>2</sup>Englisch: Reduced Order Model.

Insbesondere für die Auslegung der adaptiven Regler sind ganzheitliche Systemsimulationen im Zeitbereich notwendig. In Mehrdomänen-Simulationen oder Hardware-in-the-Loop (HIL) Tests sowie in weiteren Bereichen des Ingenieurwesens und der Mathematik werden MOR-Methoden bereits ausgiebig verwendet. Werden im Rahmen des Entwicklungsprozesses Designparameter häufig verändert, ist der Einsatz von konventionellen MOR-Verfahren nicht mehr sinnvoll. Die Zeit- und Ressourcenersparnis wird von dem rechenintensiven Prozess zur Erzeugung eines neuen, gültigen ROM überdeckt. Darüber hinaus kommen vermehrt automatisierte Optimierungsverfahren zum Einsatz. Designparameter, das heißt Geometrie- sowie Materialparameter, werden rechnergestützt innerhalb gewisser Grenzen so bestimmt, dass das zu optimierende System ein gewünschtes Soll-Verhalten aufweist. Hierbei ist eine wiederholte Analyse der numerischen Modelle für verschiedene Parameterwerte erforderlich.

In den vergangenen Jahren wurde an weiterführenden Methoden zur parametrischen Modellordnungsreduktion (PMOR) geforscht. Mit Hilfe dieser Methoden wird ein parametrierbares FOM so reduziert, dass das korrespondierende ROM trotz deutlich geringerer Ordnung die Parameterabhängigkeit beibehält. Obgleich die PMOR noch eine junge Forschungsdisziplin ist, existieren bereits diverse Ansätze und Methoden. Allerdings ist bisher noch kein Verfahren in kommerziellen FE-Programmen verfügbar. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die vorgeschlagenen Methoden noch Defizite bezüglich effizienter Generierung, Genauigkeit oder Anwendbarkeit aufweisen. Gleichwohl wird erwartet, dass die PMOR einen wichtigen Bestandteil im Rahmen zukünftiger Weiterentwicklungen des modellbasierten Entwurfsprozesses darstellen wird. Parametrische ordnungsreduzierte Modelle (PROM<sup>3</sup>) können zukünftig in multiparametrischen Mehrziel-Optimierungen, sowohl in der frühen Konzeptionsphase als auch dem späteren Detailentwurf von technischen Systemen, verwendet werden. In frühen Entwurfsphasen bieten effiziente und parametrische Modelle beispielsweise die Möglichkeit Software-basierte Entscheidungen durch Frontloading zu treffen und führen in späteren Entwicklungsphasen zu weniger Iterationen. Damit solche Entscheidungen in einer frühen Phase getroffen werden können, sind genaue und valide Modelle notwendig.

In der Systemintegrationsphase oder in der Betriebsphase können PROM durch schnelle Berechnungen von Varianten und kontinuierlicher Validierung des virtuellen und des realen Systems weiteren Mehrwert generieren (z. B. Parameterstudien in HIL-Tests). Die virtuellen Abbilder verarbeiten dabei reale und virtuelle Informationen von Prozessen, Produkten oder Dienstleistungen. Physische Dinge werden dadurch mit digitalen Diensten zu hybriden, zugleich digitalen und physikalischen Produkten kombiniert. Um die volle Leistungsfähigkeit der hybriden Systeme auszuschöpfen, müssen diese künftig nicht nur miteinander vernetzt sein, sondern zudem smarte Eigenschaften besitzen. Zur Entwicklung von Systemen, die sich auf veränderliche äußere Bedingungen anpassen und ihre dynamischen Systemeigenschaften autonom selbst-optimieren, benötigt es eine leistungsfähige, effiziente Entwicklungsumgebung, mithilfe derer parametrische und echtzeitfähige Modelle entlang der Produktlebens-

---

<sup>3</sup>Englisch: Parametric Reduced Order Model.

phasen über die gesamte Wertschöpfungskette realisiert werden können.

## 1.2 Ziel und Gliederung der Arbeit

### Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung und Validierung einer Methode zur parametrischen Beschreibung dynamischer Struktursysteme für Echtzeit-Anwendungen. Das vorgeschlagene Vorgehen leistet einen Beitrag zur zuverlässigen Nachverfolgbarkeit und einfachen Aktualisierung von Daten und Modellen über den gesamten Lebenszyklus eines Produktes. Die durchgängige Nutzung eines parametrischen strukturdynamischen Modells von der Planung über die Auslegung bis hin zur Zustandskontrolle im Betrieb steht dabei im Fokus. Folglich entsteht ein virtuelles Modell des Produkts bereits in der Definitionsphase der Anforderungen. Das wesentliche Charakteristikum im sich anschließenden modellbasierten Entwicklungsprozesses ist die, in ihrem Detaillierungsgrad an die jeweilige Entwicklungsphase angepasste numerische Systemsimulation. Das hierarchisch erweiterbare Systemmodell kommt von der Konzeptfindung über die Optimierung und den Detailentwurf bis hin zur Validierung zur Anwendung.

Ausgehend von der modellbasierten Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme (V-Modell) wird eine erweiterte strukturierte Methode zur parametrischen Modellbildung dynamischer Systeme entwickelt, die in einem integrativen und domänenübergreifenden Systementwurf Anwendung finden kann. Die Methodenentwicklung baut dabei auf numerischen Standardverfahren (Finite-Elemente-Methode und Modellordnungsreduktion) aus dem Auslegungsprozess mechanischer Strukturen auf und lässt sich somit problemlos in bestehende Entwicklungsprozesse integrieren. Die parametrischen Beschreibungen der Teilsysteme ermöglichen es, konstruktive Parameter in einer variablen hybriden (numerischen und experimentellen) Entwicklungsumgebung systematisch zu untersuchen und zu bewerten. Weiterhin sollen Über- und Unterdimensionierung vermieden, Iterationen verringert und Entwicklungszeiten sowie -kosten gesenkt werden. Ein Mehrwert zu den aus der Literatur bekannten Ansätzen ergibt sich aus der durchgängigen parametrischen Modellbildung dynamischer Struktursysteme von der Konzept- bis in die Betriebsphase. Mithilfe der vorgestellten Methodik und auf Basis der entwickelten virtuellen Modelle können hybride Systeme mit smarten Eigenschaften konzipiert und ausgelegt werden. Im Bereich der Strukturdynamik erweitert die Kombination aus Echtzeitfähigkeit und Parametrierbarkeit der Modelle zur Simulationslaufzeit den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft und Technik.

Die im Rahmen der Arbeit verfolgten Teilziele können somit wie folgt zusammengefasst werden:

1. Es soll eine Methode und ein teil-automatisiertes Vorgehen zur parametrischen Modellbildung dynamischer Systeme entwickelt werden. Dies soll aufbauend auf Studien und Theorien zur parametrischen und nicht-parametrischen

Modellordnungsreduktion erfolgen und einen starken anwendungsorientierten Forschungsschwerpunkt besitzen.

2. Die entwickelten Methoden und Modelle sollen in allen Phasen der modellbasierten Entwicklung Anwendung finden. Insbesondere soll der Fokus auf der Konzeptfindung und der Validierungsphase liegen. Durch die Nutzung von detaillierten FE-Modellen anstatt idealisierten Beschreibungen soll die Bewertung verschiedener Konzepte schon frühzeitig verbessert werden. Bei der Validierung soll auf Modelle des modellbasierten Entwicklungsprozesses zurückgegriffen werden und kein zusätzlicher Aufwand in der Modellbildung entstehen.
3. Die Modellbildung soll dabei auf numerischen Standardverfahren aufbauen und einfach in bestehende Entwicklungsprozesse integriert werden. In diesem Zusammenhang soll auf praxistaugliche Zeit- und Rechenkapazitäten geachtet werden.
4. Das Anwendungsziel der Modelle soll die systematische Untersuchung und Bewertung konstruktiver Parameter in einer variablen hybriden (numerischen und experimentellen) Entwicklungsumgebung sein. Die Erweiterbarkeit der Methodik auf in dieser Arbeit nicht betrachtete Parameter soll gegeben sein.
5. Anhand schwingungstechnischer Anwendungsfälle soll die Leistungsfähigkeit der Methodik zur parametrischen Modellbildung analysiert und bewertet werden.

Die Entwicklung der Methodik wird am Beispiel eines eingespannten Balkens durchgeführt und auf den komplexeren Anwendungsfall einer hochdynamischen Versuchsumgebung übertragen. Anhand möglicher Anwendungsszenarien, die sich im Kontext der Digitalisierung ergeben, wird die Leistungsfähigkeit der Entwicklungsumgebung untersucht und bewertet. Zunächst wird die Anwendung parametrischer Modelle im Auslegungs- und Optimierungsprozess von Komponenten und Systemen analysiert. Dabei stehen zeit- und ressourceneffiziente Machbarkeits- und Sensitivitätsanalysen sowie Entwurfsraumbewertungen im Fokus. Abschließend werden die parametrischen Strukturmodelle experimentell validiert und die Tauglichkeit zur Verwendung als virtuelle Sensorik und für einen Online-Modellabgleich bewertet. Zukünftig sollen die in den Entwicklungsphasen erzeugten numerischen Modelle zudem zur Zustandsüberwachung verwendet werden können. Aus dem zeitlichen Verlauf von identifizierten Parametern, die in einer digitalen Akte archiviert werden, soll eine Abschätzung der Alterung, Schädigung oder Restlebensdauer abgeleitet werden können.

## **Aufbau der Arbeit**

Die vorliegende Arbeit ist in acht Kapitel gegliedert. Nach der Einleitung wird in Kapitel 2 zunächst der Stand der Wissenschaft im Hinblick auf die Systementwicklung, die System- und Echtzeitsimulation sowie die digitale Transformation beschrieben. Der aktuelle Stand der Technik und Wissenschaft im Bereich der Modellordnungsreduktion ist an der relevanten Stelle im dazugehörigen Grundlagenkapitel einsortiert.

In Kapitel 3 schließen sich zum besseren Verständnis der folgenden Abschnitte die systemtheoretischen Grundlagen zur Beschreibung dynamischer Systeme an. Es werden die üblichen Darstellungsformen linearer zeitinvarianter Systeme, deren Eigenschaften, Zeit- und Frequenzbereichsräume sowie die später genutzten Gütekriterien und Normen vorgestellt. In dem anschließenden Kapitel 4 sind die Grundlagen der Modellordnungsreduktion beschrieben. Es werden die Grundprinzipien nicht-parametrischer und parametrischer Verfahren dargelegt sowie bestehender Handlungsbedarf festgestellt. In Kapitel 5 wird die Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen entwickelt und deren Ablauf vorgestellt. Dabei werden zunächst die Anforderungen an die Methodik und das entwickelte Vorgehen beschrieben. Anschließend wird auf den Einfluss der Parameter, die numerische Umsetzung und die Integration in die modellbasierte Systementwicklung eingegangen. Die folgenden Kapitel befassen sich mit der Analyse und Bewertung der entwickelten Methode anhand unterschiedlicher strukturdynamischer Anwendungsfälle. In Kapitel 6 werden die parametrischen Modelle zunächst mit dem Hauptaugenmerk auf Konzeptfindung, Optimierung und Detailentwurf numerisch untersucht. Anschließend werden die erzeugten Modelle an einem akademischen Beispiel experimentell validiert und für einen Online-Modellabgleich sowie eine Modellaktualisierung genutzt. In Kapitel 7 werden die entwickelten Methoden und Modelle auf industrienähe Anwendungen aus der Fahrzeugentwicklung und der hochdynamischen Versuchstechnik übertragen. Abschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse in Kapitel 8 zusammengefasst und ein Ausblick auf die Möglichkeiten zur Fortführung der Forschungsarbeiten gegeben.

## *Kapitel 1 Einleitung*



# Kapitel 2

## Stand der Wissenschaft

### 2.1 Modellbasierte Systementwicklung

Heutzutage werden bei der Entwicklung moderner technischer Systeme verschiedene Fachdisziplinen vom Maschinenbau über die Elektrotechnik bis hin zur Informatik benötigt. Dies gilt insbesondere in der Mechatronik und Adaptronik. Traditionell wurde jede Disziplin eigenständig entwickelt und dann in das endgültige System integriert. Qualitativ hochwertige Designs können jedoch nicht ohne gleichzeitige Berücksichtigung aller technischen Disziplinen erreicht werden. Dieser integrierte Ansatz der Systementwicklung geht einher mit einer erheblichen Steigerung der Komplexität sowie einer stärkeren Vernetzung der Systemfunktionen und ist weiterhin Gegenstand aktueller Forschungsaktivitäten [123]. In diesem Abschnitt werden bekannte Vorgehensmodelle sowie modellbasierte Entwicklungsmethoden vorgestellt und abschließend die wichtigsten Phasen der modellbasierten Entwicklung zusammengefasst.

#### 2.1.1 Vorgehensmodelle

In der Mechanik, der Elektrotechnik und Elektronik sowie der Softwareentwicklung werden seit Jahren Methoden und Vorgehensmodelle vorgeschlagen, um den Produktentwicklungsprozess (PEP) zu unterstützen. Diese sind meist als strukturierte und prozessorientierte Richtlinien ausgelegt. Verschiedene Phasen des PEP werden einmalig oder zyklisch durchlaufen und können Disziplin-spezifische oder übergreifende Entwurfsmethoden und Vorgehensmodelle beinhalten [125].

Disziplin-übergreifende Vorgehensmodelle wurden mehrheitlich im Arbeitsgebiet der Mechatronik entwickelt, da hier der interdisziplinäre Systemgedanke in den Mittelpunkt der Produktentwicklung gestellt wird [68]. Mechatronische Methoden und Vorgehensmodelle basieren meist auf verschiedenen Variationen des V-Modells. Das bekannteste Vorgehen ist in der VDI-Richtlinie 2206 „Entwurfsmethodik für mechatronische Systeme“ [126] als ein allgemeingültiger, praxisorientierter Leitfaden mit den drei Elementen „Problemlösungszyklus als Mikrozyklus“, „V-Modell

als Makrozyklus“ und „Prozessbausteine für wiederkehrende Arbeitsschritte“ dargestellt. In der Richtlinie wird die modellbasierte Entwicklung mit dem Fokus auf den Systementwurf, die Systemintegration und die Absicherung der Eigenschaften beschrieben.

Abbildung 2.1 zeigt das in [126] vorgeschlagene V-Modell. Ausgangspunkt sind dabei konkrete Anforderungen, die zugleich die Bewertungskriterien eines späteren Produkts darstellen. Im Systementwurf wird die Gesamtfunktion des Systems in Teilfunktionen unterteilt und die konkreten Lösungen des domänenspezifischen Entwurfs werden in der Systemintegration wieder zu einem Gesamtsystem vereinigt. Die Eigenschaftsabsicherung bezeichnet die iterative Auswahl und Bewertung einzelner Lösungsvarianten. Der gesamte Prozess soll dabei durch rechnergestützte Modellbildung und Simulation unterstützt werden. Als Produkt wird das Ergebnis eines durchlaufenen Zyklus des V-Modells bezeichnet, wobei es sich hierbei um einen bestimmten Reifegrad (Labormuster, Funktionsmuster, Vorserienmuster) des geplanten Endproduktes handeln kann.

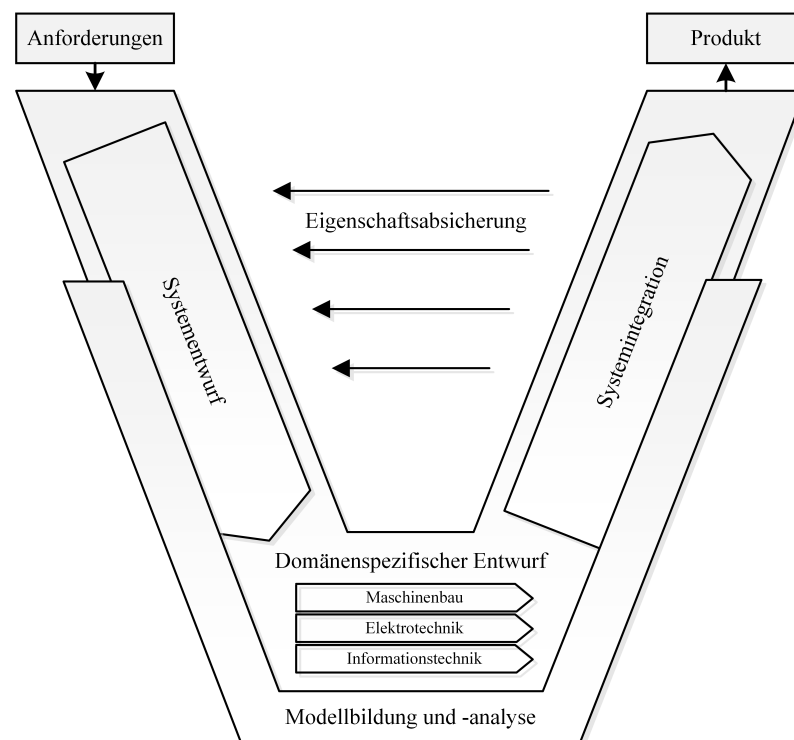


Abbildung 2.1: V-Modell als Makrozyklus [126]

Vom V-Modell abgeleitete und in Teilen detailliertere Vorgehensmodelle wurden unter anderem von Bender [18], Anderl [4] und Isermann [67] vorgestellt. Ausgehend vom V-Modell aus der VDI-Richtlinie erweitert Letzterer die Entwicklung mechatronischer Systeme in dreizehn Teilschritte. Hierbei werden Iterationen, bei denen der Reifegrad sukzessive zunimmt und an deren Ende der nächste Makrozyklus beginnt, detailliert aufgestellt und konkretisiert. Hierdurch enthält dieses Vorgehensmodell weniger allgemeingültige, dafür aber unmittelbarer anwendbare

Handlungsempfehlungen. Die bekannten Vorgehensmodelle sind meist entweder bewusst allgemein gehalten oder auf ein bestimmtes Anwendungsgebiet zugeschnitten. In vergangenen Arbeiten wurden spezifische Anwendungsfälle genutzt, um das V-Modell aus der Richtlinie anzupassen und weiterzuentwickeln. So definiert Bartel ein detailliertes Vorgehen zur Erzeugung der notwendigen numerischen Modelle, welche den jeweiligen spezifischen Entwicklungsschritten angepasst sind [13], Nattermann untersucht die Anbindung des Vorgehensmodells an ein Produktdatenmanagement für verteilte Entwicklungsprozesse [94] und Barbieri schlägt die Erweiterung durch Nutzung der Systemmodellierungssprache *SysML* vor [12]. Ein geeignetes Vorgehen zur modellbasierten, hybriden Entwicklung wurde in [71] vorgestellt und anhand einer exemplarischen Entwicklung elektromechanischer Systeme zur Schwingungsminderung demonstriert. Diese Methodik basiert im Wesentlichen auf einer durchgängigen, in ihrem Detaillierungsgrad an die jeweilige Entwicklungsphase angepassten numerischen Systemsimulation im Zeitbereich.

### 2.1.2 Modellbasiertes Systems Engineering

Bereits seit einigen Jahrzehnten wurde, parallel zu den vorgestellten Vorgehensmodellen, das Systems Engineering (SE) als interdisziplinärer, dokumentengetriebener Ansatz zur Entwicklung und Umsetzung komplexer, technischer Systeme entwickelt. Insbesondere bei sicherheitsrelevanten Missionen in der Luft- und Raumfahrt, die nicht anhand von Prototypen getestet werden können, hat sich das Verfahren etabliert. Eine erfolgreiche Mission unter Schwerelosigkeit und allen Raumfahrteinflüssen als „first time right“ sicherzustellen, erfordert eine ganzheitliche und systematische Vorgehensweise sowie die konsequente Nutzung von formalisierten Methoden und Prozessen. Dieser Ansatz wurde aus Sicht der Software- und Elektronikindustrie permanent ausgebaut und befindet sich auch im Schienenverkehr oder im Schiffbau seit Jahren in der Anwendung.

Systems Engineering ist ein durchgängiger Disziplin-übergreifender Ansatz zur Entwicklung multidisziplinärer Systeme. Es adressiert aber nicht nur das zu entwickelnde System, sondern auch das dazugehörige Projekt [60]. Es hat seinen Ursprung in der Systemtheorie und wird, ausgelöst durch den stetigen Komplexitätszuwachs in der technischen Aufgabenstellung, kontinuierlich weiterentwickelt. Die aktuellen Forschungsthemen Industrie 4.0 und cyber-physische Systeme sind heute wesentliche Treiber des Systems Engineering [48].

Das Model-Based Systems Engineering (MBSE) stellt dabei ein Disziplin-übergreifendes Systemmodell in den Mittelpunkt der Entwicklung [39]. Die Modellbildung und die Modellaktualisierung ist ein zentrales Element, um Systemanforderungen, Entwurf, Analyse, Verifizierung und Validierung zu unterstützen. Der Prozess beginnt bereits in der Konzeptionsphase und wird dann kontinuierlich in allen Entwicklungs- und Lebenszyklusphasen angewandt. Dabei integriert MBSE vorhandene Disziplinspezifische Modelle über geeignete Schnittstellen in das ganzheitliche Systemmodell [66]. Abbildung 2.2 zeigt das erweiterte V-Modell für die modellbasierte Systement-

wicklung.

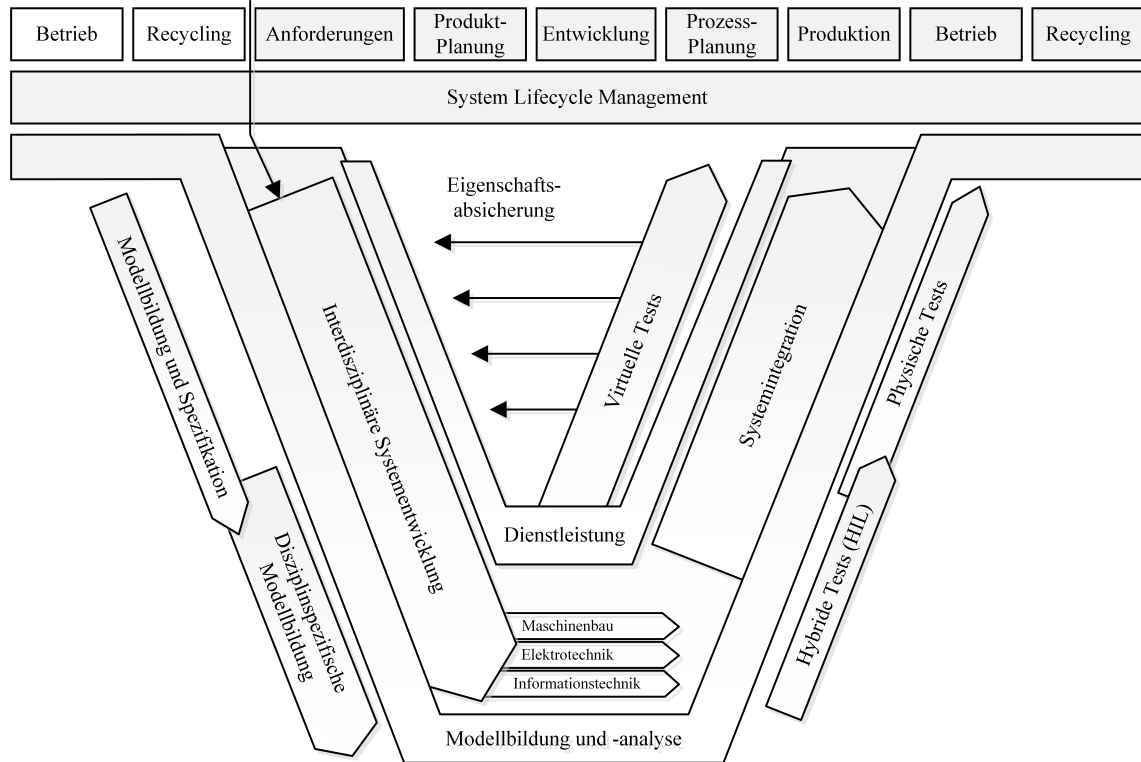


Abbildung 2.2: Erweitertes V-Modell für MBSE-Anwendungen, angelehnt an [126] nach [38]

Dieser erweiterte systematische Ansatz ist angelehnt an das V-Modell nach VDI 2206. Durch die Erweiterungen am linken Flügel des „V“ (vgl. Abbildung 2.2) soll eine modellbasierte und strukturierte Systembeschreibung in der frühen Phase der Systementwicklung gewährleistet werden. Die Systematisierung auf dem linken „Flügel“ dient dabei zur Beschreibung der drei Ebenen: Spezifikation, erste Simulationen und Disziplin-spezifische Modellierung [40]. Zudem ist diese Variante des V-Modells im Vergleich zu der ursprünglichen Version um eine übergeordnete Ebene erweitert. Über das sogenannte „System Lifecycle Management“ integriert dieses Vorgehen alle Modelle und Methoden aus allen Entwicklungs- und Lebenszyklusphasen.

### 2.1.3 Phasen der modellbasierten Entwicklung

Die Entwicklung komplexer technischer Systeme erfordert eine systematische, auf die spezifischen Anforderungen angepasste Vorgehensweise, die die meist interdisziplinär zusammengesetzte Arbeitsgruppe von der detaillierten Klärung der Aufgabenstellung über die Konzeptionierung und prototypische Umsetzung bis hin zur Validierung und Systemintegration unterstützt. In dieser Arbeit stehen die Entwicklung und Anwendung parametrischer und echtzeitfähiger Strukturmodelle im Fokus. Ausgehend von den bekannten Vorgehensmodellen und unter Berücksichtigung der Entwicklungen des

MBSE werden daher im Folgenden die für die vorliegende Arbeit wichtigsten Entwicklungsphasen näher beschrieben. Basierend auf der vorgeschlagenen Vorgehensweise in Herold et al. [63] und Jungblut [71] wird der modellbasierte Entwicklungsprozess in die folgenden fünf Entwicklungsphasen gegliedert:

1. Definition
2. Konzeptfindung
3. Optimierung
4. Detailentwurf
5. Validierung

In der **Definitionsphase** werden die Randbedingungen und Schnittstellen definiert, Betriebsbedingungen analysiert und die Aufgabenstellung detailliert. Hierzu wird ein erstes numerisches Systemmodell, welches in dieser frühen Phase aus einfachen idealisierten Komponenten bestehen kann, aufgebaut. Trotz möglicherweise unzureichend genauer Teilmodelle sind in diesem Modell bereits alle relevanten Schnittstellen definiert und vorbereitet. Dies betrifft insbesondere globale Ein- und Ausgangsgrößen sowie die interne Kopplung der Teilmodelle. Die Modelle der Strukturmechanik werden häufig anhand analytischer oder numerischer Beschreibungen gebildet, während die prognostizierten Anregungen meist aus experimentell ermittelten Daten stammen. Zunächst ist das Zusammenspiel der Eigenschaften der mechanischen Struktur (z. B. Eigenfrequenzen, Eigenformen, Dämpfung) und der Anregung (z. B. Frequenzbereich, Amplituden) von Interesse. Weitere prinzipielle Eigenschaften des Gesamtsystems (z. B. dynamische Steifigkeiten, notwendige Sensorempfindlichkeiten und Aktorkräfte, Regelungsparameter) können mit den Modellen in der Definitionsphase abgeschätzt werden. Hiermit lässt sich üblicherweise die Aufgabenstellung frühzeitig und effizient konkretisieren.

Auf Basis des entwickelten Systemmodells werden in der **Konzeptfindung** verschiedene prinzipielle Lösungsansätze untersucht, analysiert und bewertet. Insbesondere parametrische Modelle des Ausgangssystems ermöglichen es dabei, die Auswirkung möglicher Konzepte und Designentwürfe effizient abzuschätzen. Bei der Konzeptionierung selbstanpassender, aktiv reagierender mechanischer Struktursysteme stehen die aktiven Systemfunktion im Fokus der Untersuchungen. Charakteristisch für solche Systeme ist ihre Vernetzung und umfangreiche Interaktion sowie die Verbindung der Systeme mit der physikalischen Welt über Sensoren und Aktoren. Insbesondere müssen Konzepte zur Interaktion innerhalb der Systeme, zur Interaktion der Systeme untereinander und nicht zu Letzt zur Kommunikation mit ihrer Umgebung über Nutzerschnittstellen analysiert und bewertet werden. Von Interesse sind daher in der Konzeptphase häufig die erforderliche Bandbreite der Sensorik und Aktorik sowie die erforderlichen Aktorkräfte. Weiterhin ist die Abschätzung der weichen und harten Zeitanforderungen, wenn die Reaktion der Systeme innerhalb vorgegebener Zeitschranken erfolgen muss, von hoher Bedeutung. In dieser Phase werden die Teilmodelle so weit detailliert, dass die Wirkung und prinzipielle Umsetzbarkeit der

Komponenten und Teilsysteme überprüft werden kann. Im Hinblick auf Fragen des Langzeitbetriebs, aber auch der Anpassung der Systeme an sich ändernde Betriebsumgebungen können die Systemparameter und deren voraussichtliche Parameterräume ermittelt werden.

Zwischen Konzeptfindung und Detailentwurf gliedert sich die **Optimierungsphase** ein. Das Optimierungsziel ist dabei, den besten und möglichst vollständigen Parametersatz für ideale Eigenschaften des Gesamtsystems zu berechnen. Die Zielfunktionen und Nebenbedingungen können dabei Parameter aus unterschiedlichen Domänen (z. B. Gewicht, Dynamik, Bandbreite, Abtastzeit) enthalten. Spätestens in dieser Phase wird mit dem Austausch einzelner Komponenten durch Modelle basierend auf Finite-Elemente-Berechnungen begonnen. Teilmodellbeschreibungen werden detailliert und gegebenenfalls um Beschreibungen weiterer, bisher noch nicht berücksichtigter Komponenten erweitert. In Abhängigkeit der Anforderungen und der Aufgabenstellung werden die Systemparameter unter Berücksichtigung aller modellierten Wechselwirkungen im Systemkontext festgelegt oder für spätere Variationen in der Nutzungsphase offengelassen. Das modellbasierte Vorgehen ermöglicht hierbei den Einsatz mathematischer Optimierungsalgorithmen. Die Ein- und Ausgangsgrößen der parametrischen Modelle sowie deren Parameterräume sind zum Ende der Optimierungsphase spezifiziert.

Im **Detailentwurf**, der letzten Entwicklungsphase eines aktiven mechanischen Struktursystems, findet die Ausgestaltung und Detaillierung der einzelnen Teilsysteme statt. Dieser Prozess muss nicht auf Systemebene durchgeführt werden, sondern kann domänenspezifisch auf das jeweilige Teilsystem zugeschnitten sein. In der abschließenden Detaillierung sind alle notwendigen Anforderungen und Eigenschaften zu berücksichtigen, die in den vorherigen Schritten vernachlässigt wurden. Dies kann zum Beispiel die Prozessgenauigkeit in der Produktion, Temperaturabhängigkeiten oder die Festigkeit mechanischer Bauteile betreffen. Unterstützt wird die detaillierte numerische Simulation dabei durch parallel durchgeführte experimentelle Untersuchungen prototypischer Hardware. Die Teilsysteme werden basierend auf dem gemessenen dynamischen Verhalten einzelner Komponenten aktualisiert. Durch die Verknüpfung aller Teilsysteme der einzelnen Fachdisziplinen resultiert am Ende dieser Entwicklungsphase das vollständige virtuelle Gesamtsystem.

In der abschließenden **Validierungsphase** werden die physischen Komponenten hergestellt und die Möglichkeit vorgesehen, die numerischen Modelle experimentell zu validieren. Die aktuellen für jedes Teilsystem individuellen Parametersätze werden ermittelt und in dem virtuellen Abbild gespeichert. Schnittstellen zwischen physischer und virtueller Welt werden getestet und die Leistungsfähigkeit der Hardware in Hinblick auf Rechen-, Speicher- und Übertragungsleistung überprüft. Zu diesem Zeitpunkt können bereits erste Aussagen zu den Unsicherheiten der Eingangsparameter sowie deren Auswirkungen auf das Gesamtsystemverhalten getroffen werden. Zudem können freigeschnittene und bereits validierte Teilsysteme in Hardware-in-the-Loop-Tests als virtuelle Restsystems simulationsmodelle genutzt werden. Am Ende der Validierungsphase stehen das physische System, ein detailliertes validiertes virtuelles

Abbild und ein daraus abgeleitetes parametrisches und echtzeitfähiges Modell.

## **2.2 Ganzheitliche Systemsimulation**

Simulation bezeichnet grundsätzlich die Beschreibung und Analyse des Verhaltens eines Systems oder Prozesses [78]. Dabei geht es darum die Systemgleichungen zu lösen, d. h. den Verlauf von Zustands- und Ausgangsgrößen von einem gegebenen Anfangspunkt aus und bei einem bekannten Eingangsgrößenverlauf möglichst genau zu bestimmen. Bei dynamischem Systemverhalten stellt die Simulation häufig die einzige Möglichkeit zur Systemanalyse dar. Die Implementierung eines Simulationsmodells beschreibt hierbei den Prozess der Abstraktion des zu simulierenden Systems mit dem Fokus auf dessen Funktion und Verhalten. Wie im vorangegangenen Abschnitt 2.1.1 beschrieben, ist das in ihrem Detaillierungsgrad an die jeweilige Entwicklungsphase angepasste numerische Systemmodell das zentrale Element des modellbasierten Entwicklungsprozesses [63, 71]. Die Systemsimulation ist gekennzeichnet durch die Berücksichtigung unterschiedlichster Teilsysteme mit ihren Wechselwirkungen innerhalb eines ganzheitlichen Modells. Sie erlauben die Analyse komplexer multiphysikalischer Systeme mittels Kopplung unterschiedlicher physikalischer Disziplinen auf Feld- und Systemebene. Lassen sich die ingenieurtechnischen Aufgaben nicht durch die Beschreibung einzelner physikalischer Effekte exakt genug lösen, bieten Domänen-übergreifende Simulationsmodelle die Möglichkeit das reale Verhalten deutlich besser zu approximieren [17, 61]. Insbesondere bei der Simulation von dynamischen Vorgängen, bei denen das zeitliche Verhalten von Systemen unter Berücksichtigung von Speicher-Elementen für Energie, Stoff oder Information nachgebildet wird, ist das Zusammenspiel aller beteiligten Komponenten ganzheitlich zu betrachten. Ganzheitlich bedeutet hier, dass der Ingenieur das zugrundeliegende System von der Strukturmechanik über die Sensorik und Aktorik bis hin zu den Komponenten der Steuerungs- und Regelungstechnik modellieren, berechnen und bewerten kann. Hierbei stehen oftmals Struktur- und Parameteroptimierung gleichermaßen im Vordergrund [124, 70].

Um die vorgeschlagene sukzessive Erweiterung und Detaillierung der Teilmodelle in allen verschiedenen Phasen des Entwicklungsprozesses zu ermöglichen, benötigt das ganzheitliche Systemmodell eine modulare und hierarchische Struktur. Dieser Aufbau ermöglicht es, den Detaillierungsgrad der Komponenten an den Erkenntniszuwachs während der Auslegung anzupassen. Ein Gesamtsystemmodell besteht nach [62, 63] folglich aus mindestens fünf Teilmodellen. Die Grundstruktur bilden die Modelle der Strukturmechanik und der äußeren Lasten, die das System anregen. Für die mechatronischen Teilsysteme werden zusätzliche Modelle zur Nachbildung des Verhaltens der Sensorik und Aktorik sowie der Signalverarbeitung benötigt. Für die konkrete Umsetzung ist auf die konsistente Definition von Schnittstellen zwischen den einzelnen Teilmodellen und auf geeignete Modellierungsansätze zur Beschreibung der Teilmodelle zu achten. Bekannte Softwarepakete, die die genannten

Anforderungen erfüllen können, sind Mathworks Matlab/Simulink, Simcenter Amesim, Altair Compose/Activate oder Scilab. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit, wird die Matlab/Simulink-Umgebung für die Systemsimulation genutzt. Diese ermöglicht eine Simulation im Zeitbereich, die Verwendung einer modularen und hierarchischen Modellstruktur und unterstützt die Erstellung, Einbindung und Anwendung von eigenen Modellbibliotheken.

In Matlab/Simulink können dynamische Systeme anhand ihres Signalflusses mittels Blockschaltbilder beschrieben werden. Jeder Block repräsentiert das Übertragungsverhalten zwischen den Ein- und Ausgängen eines Teilsystems. Diese Teilmodelle werden üblicherweise durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben, die für den Fall eines parametrischen Modells mit den Systemparametern  $p_1, \dots, p_n$  folgende Form aufweisen:

$$\dot{q}(t) = f(q(t), p_1(t), \dots, p_n(t), t). \quad (2.1)$$

Unter Beibehaltung der Modellstruktur werden die Modelle dann mit fortschreitender Konkretisierung des Systems detailliert und ergänzt. Hierzu existieren diverse Methoden zum Aufbau der Teilmodelle mit konstruktiven Parametern, zur Identifikation von Modellparametern und zur Ableitung vereinfachter Ersatzmodelle aus detaillierten Simulationen oder Messungen.

In frühen Entwicklungsphasen ist die Abbildung der Teilsysteme noch mittels analytischer Beschreibungen möglich. Bei praxisrelevanten Problemstellungen sind analytische Betrachtungen jedoch nur noch bedingt anwendbar. Die Gleichungen, die zur realistischen Beschreibung der Prozesse herangezogen werden müssen, sind meist so komplex, dass sie nicht mehr analytisch lösbar sind. Daher nimmt mit fortschreitender Detaillierung des Systems die Bedeutung numerisch oder experimentell ermittelter Teilmodelle zu. Einen Überblick über die generelle Vorgehensweise zur Modellbildung strukturmechanischer Systeme zeigt Abbildung 2.3.

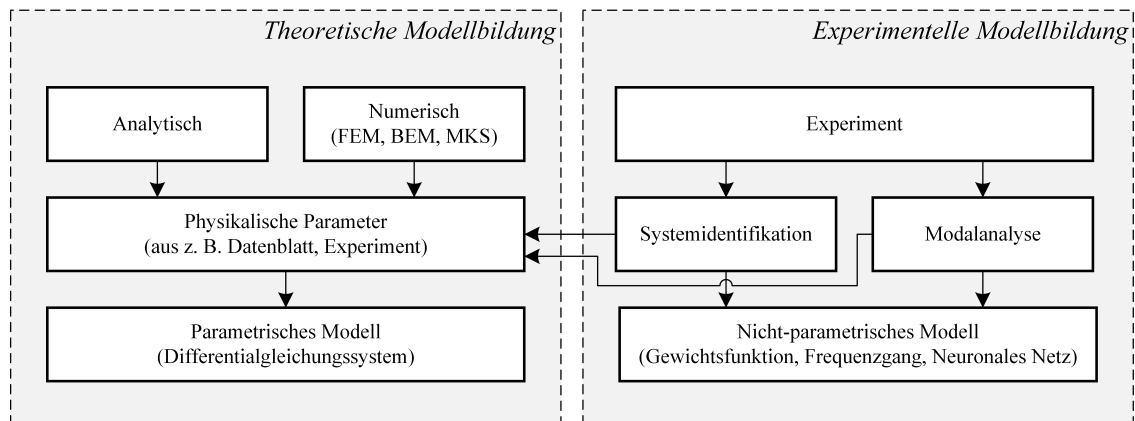


Abbildung 2.3: Übersicht über die Modellbildung dynamischer Systeme, angelehnt an [67]

Numerisch erzeugte Teilmodelle werden häufig aus Domänen-spezifischen Simula-



tionswerkzeugen importiert. Die bekanntesten numerischen Verfahren sind die Finite-Elemente-Methode (FEM) [135, 14], die Randelementmethode (BEM<sup>1</sup>) [47, 134] und die Mehrkörpersimulation (MKS). MKS-Modelle werden mit konzentrierten Parametern gebildet, die beispielsweise mechanische Strukturen idealisiert als Punktmassen, Elastizitäten und Dämpfungselemente approximieren [32]. Für reine Starrkörpersysteme können dabei explizite Zeitintegrationsverfahren effizient eingesetzt werden. Als flexible Mehrkörpersysteme bezeichnet man Modelle, in denen mindestens eine Komponente verformbar ist. Zur Lösung dieser Systeme sind in den meisten Fällen implizite Zeitintegrationsverfahren notwendig [22].

Üblicherweise kommen heutzutage für komplexe Entwicklungsaufgaben numerische Näherungsverfahren zum Einsatz. Generell wird zunächst eine genäherte Lösungsfunktion, die aus Ansatzfunktionen multipliziert mit unbekannten Parametern besteht, abgeleitet. Danach werden die Parameter durch ein Minimalprinzip (z. B. Fehlerquadrat-, Energieminimum) berechnet. Das Differentialgleichungssystem wird somit mathematisch gesehen in ein Variationsproblem überführt bei dem nur noch ein algebraisches Gleichungssystem gelöst werden muss. Die Güte des Verfahrens hängt von den gewählten Ansatzfunktionen und der Anzahl der unbekannten Parameter ab. Insbesondere für mechanische Strukturen hat sich in den vergangenen Jahrzehnten die FEM bewährt und durchgesetzt. Die FEM ermöglicht detaillierte Analysen bei moderaten Anforderungen an die Bedienung und Nutzung. Durch geeignete Schnittstellen zu rechnergestützten Konstruktionswerkzeugen (CAD<sup>2</sup>-Systemen) können zudem die bereits vorhandenen geometrischen Daten zur automatisierten Generierung der FE-Modelle genutzt werden.

Aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten sind die FE-Modelle auch in den weiteren Entwicklungsphasen und für Betrachtungen auf Systemebene zu nutzen. Dies kann zum einen durch eine Ko-simulation realisiert werden. Hierbei werden zu diskreten Zeitpunkten die berechneten Koppelgrößen zwischen den beteiligten numerischen Werkzeugen ausgetauscht. Voraussetzung ist eine geeignete Synchronisation der Schrittweiten der einzelnen Teilmodelle. Zum anderen können die numerischen Teilmodelle in eine Systemsimulation integriert werden. Die Systemmatrizen werden dazu aus der Domän-spezifischen Anwendung exportiert und in eine Systemsimulationsumgebung importiert. Üblicherweise ist die Modellordnung eines FE-Modells jedoch zu hoch, um effizient in einer transienten Systemsimulation gelöst zu werden. Aus diesem Grund wurden Methoden zur Modellordnungsreduktion [7, 109] entwickelt. Verglichen mit dem Originalmodell, werden mithilfe dieser mathematischen Verfahren ordnungsreduzierte Modelle mit sehr viel kleinerer Ordnung und hinreichend ähnlichem Ein- und Ausgangsverhalten erzeugt. Der Stand der Wissenschaft bezüglich nicht-parametrischer und parametrischer MOR ist umfassend im Abschnitt 4.1 dargestellt.

Neben analytischen und numerischen Verfahren existieren auch experimentelle Methoden zur Erzeugung von Modellen. Unter Verwendung von Methoden zur Systeme-

---

<sup>1</sup>Englisch: Boundary Element Method.

<sup>2</sup>Englisch: Computer Aided Design.

midentifikation [104, 36, 121] können zum einen experimentell ermittelte Teilmodelle aus Messergebnissen erzeugt werden. Zum anderen können die bestehenden numerischen Modelle durch gemessene Daten und daraus abgeleiteten Modellparametern, beispielsweise Dämpfungsbeiwerte, aktualisiert und präzisiert werden. Eine besondere Bedeutung bei der Charakterisierung des dynamischen Verhaltens von mechanischen Strukturen wird der experimentellen Modalanalyse [42] beigemessen.

## **2.3 Echtzeitsimulation**

Unter einem Echtzeitsystem versteht man ein System, welches auf unvorhersehbare interne oder externe Ereignisse in vorhersehbaren zeitlichen Schranken reagiert. Dies ermöglicht einen Echtzeitbetrieb, bei dem Programme zur Verarbeitung anfallender Daten ständig derart betriebsbereit sind, dass die Verarbeitungsergebnisse innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne verfügbar sind [119]. Üblicherweise ist die untere zeitliche Schranke nicht relevant, sodass ein System echtzeitfähig ist, wenn es auf ein Ereignis nachweisbar nach einer maximalen Zeit reagiert [133]. Neben der Korrektheit der Simulationsergebnisse ist für diese Systeme die Erfüllung der Zeitbedingungen essentiell. Insbesondere bei der Steuerung oder Regelung technische Systeme werden echtzeitfähige Modelle benötigt.

Grundsätzlich werden an ein Echtzeitsystem Anforderungen bezüglich Rechtzeitigkeit, Gleichzeitigkeit und zeitgerechter Reaktion gestellt [77]. Zunächst müssen die notwendigen Steuerungs- oder Regelungssignale rechtzeitig, das heißt zu einem bestimmten vordefinierten Zeitpunkt, vorliegen. Die Zeitschranke ist dabei immer anwendungsspezifisch. Es werden drei unterschiedlich starke Ausprägungen unterschieden. Bei harter Echtzeit muss eine Information zur korrekten Funktion des Gesamtsystems zwingend zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegen. Die Überschreitung einer maximal zulässigen zeitlichen Abweichung führt zum Ausfall dieser Systemfunktion und kommt häufig einher mit der Gefährdung von Menschen oder der Beschädigung von Maschinen, also Auswirkungen auf Gesundheit und Unversehrtheit der Umgebung. Feste Echtzeitanforderung liegt vor, wenn das Überschreiten der Zeitschranke tolerierbar ist, die zur Verfügung gestellte Information jedoch unmittelbar ihren Nutzen verliert. Bei weicher Echtzeit ist die Einhaltung der Zeitschranken zwar wichtig, die zugrundeliegenden Systeme funktionieren bei gelegentlichen Verletzungen allerdings weiterhin korrekt. Zudem führt eine Verletzung der Ausführungszeiten in einem weichen Echtzeitsystem lediglich zu einer Verminderung der Qualität, nicht jedoch zu einer Beschädigung oder Gefährdung. Weiterhin müssen alle Aufgaben des echtzeitfähigen Systems parallel und unter Umständen mit unterschiedlichen Zeitanforderungen an die Teilsysteme bearbeitet werden. Zuletzt muss das System auf zufällig auftretende Ereignisse innerhalb einer definierten Zeit reagieren.

Im Entwicklungsprozess technischer Systeme kommen Echtzeitsimulationen üblicherweise in der Systemintegrationsphase zum Einsatz. Zu diesem Zeitpunkt liegen die numerischen Beschreibungen für alle wesentlichen Teilsysteme vor. Um bei der

experimentellen Charakterisierung der ersten physisch vorhandenen Komponenten bereits die spätere Einbausituation berücksichtigen zu können, wird das Restsystem durch echtzeitfähige Simulationsmodelle in die Prüfumgebungen einbezogen. Durch die Kopplung von realen und virtuellen Teilsystemen werden in diesen sogenannten Hardware-in-the-Loop-Tests (HIL) die Vorteile der numerischen und experimentellen Verfahren kombiniert [90, 88, 9]. Dabei unterstützt die HIL-Technologie die Parallelisierung von Entwicklungsprozessen und ermöglicht die räumliche Verteilung von Entwicklungsarbeiten [3, 107]. Darüber hinaus können Versuchszeiten reduziert werden [24, 76, 91] und Prüfungen vereinfacht beziehungsweise erst möglich gemacht werden [71, 74, 50]. So werden sicherheitskritische Tests, wie zum Beispiel die Simulation eines grenzstabilen Betriebsbereichs, risikofrei möglich [72, 1].

Durch die Möglichkeit Eigenschaftsänderungen des virtuellen Teilsystems sehr einfach und schnell realisieren zu können, ergeben sich aus HIL-Tests noch eine Vielzahl weiterer Vorteile. Beispielsweise können Parameter- und Sensitivitätsanalysen systematisch durchgeführt [41, 122], zeitvariante Eigenschaften nachgebildet und Eigenschaften der Teilsysteme optimiert [3, 132] oder die zu charakterisierende Komponente für verschiedenen Anwendungen untersucht werden [107].

Beim Entwurf eines HIL-Tests stellt die Verfügbarkeit eines geeigneten echtzeitfähigen Modells eine notwendige Bedingung dar. Das Modell muss die oben beschriebenen Voraussetzungen hinsichtlich Rechtzeitigkeit, Gleichzeitigkeit und zeitgerechter Reaktion erfüllen und sollte dabei aus dem bestehenden Systemmodell ableitbar sein. Üblicherweise stehen die Modell- und die Echtzeit bei numerischen Simulationen jedoch in keinem Zusammenhang. Insbesondere bei komplexen FEM-Modellen kann die Simulationsdauer einige Größenordnungen größer sein als die tatsächlich simulierte Zeitdauer. Zudem hängt die Recheneffizienz von den Lösungsverfahren und der verfügbaren Rechenleistung ab. Wie bei der Integration in Systemmodelle (siehe Abschnitt 2.2), haben sich zur Generierung echtzeitfähiger Modelle Verfahren der Modellordnungsreduktion (siehe Abschnitt 4.1) bewährt. Ein mögliches Vorgehen zur Erzeugung echtzeitfähiger Simulationsmodelle für HiL-Tests wurde beispielsweise in [76] am Beispiel eines piezoelektrischen Energy-Harvesters entwickelt und erprobt.

## 2.4 Digitale Transformation

Die digitale Transformation kennzeichnet sich durch drei zentrale Eigenschaften. Die Hauptmerkmale sind die Vernetzung von Menschen und Dingen, die Virtualisierung von Produkten und Prozessen sowie der Austausch von Daten und Wissen. Die wesentlichen Technologien der Digitalisierung sind erstens die Sensorik und Aktorik, welche die aktiven Schnittstellen zwischen realer und virtueller Welt darstellen, zweitens die Internettechnologien zur Informationsübertragung und drittens die Software zur Transformation von Daten in Wissen [136].

Durch digitale Produkte und Prozesse kann entlang der gesamten Wertschöpf-

fungskette, auch über den engen volkswirtschaftlichen Begriff hinaus, Mehrwert generiert werden. Insbesondere ergeben sich aus Sicht der Unternehmen wesentliche Handlungsfelder in den Bereichen Produktion und Geschäftsprozesse [5]. Die Produktion kann auf individuelle Kundenwünsche kostengünstig und flexibel reagieren. Auch Einzelstücke können rentabel hergestellt werden. Die Geschäftsprozesse können effizienter und flexibler kontrolliert und gesteuert werden. Das gilt ebenso für Produktionsabläufe, bei denen beispielsweise die Produktionszeit oder der Energieverbrauch den Gegebenheiten angepasst werden können. Auch Störungen können mithilfe dieser Systeme behoben und Abläufe optimiert werden [26]. Einzelne Maschinen oder Anlagen in der Produktion sind bereits heutzutage vernetzt und digital. Mit Industrie 4.0 geht diese Entwicklung allerdings einen Schritt weiter. Nicht nur innerhalb einer Produktionsstätte oder eines Unternehmens werden Systeme intelligent miteinander vernetzt. Maschinen und Anlagen kommunizieren zwischen Firmenstandorten und sogar mit Systemen von Zulieferern und Kunden. Zudem beschränkt sich die Vernetzung nicht nur auf die Produktions-Wertschöpfungskette. In der Entwicklung und Auslegung von Produkten sowie von Produktionssystemen als auch im operativen Betrieb des Produkts können die Systeme eigenständig und situationsabhängig auf Abweichungen reagieren [28].

Der Begriff Industrie 4.0 bezeichnet die umfassende Digitalisierung und Vernetzung der industriellen Produktion und geht zurück auf die Forschungsunion der deutschen Bundesregierung und ein gleichnamiges Projekt in der Hightech-Strategie der Bundesregierung [2]. Häufig wird dabei auch von der vierten industriellen Revolution gesprochen. Berücksichtigt wird die gesamte Wertschöpfungskette über den Lebenszyklus von Produkten. Dieser Zyklus beinhaltet die Idee, das Konzept, die Entwicklung, die Fertigung, den Betrieb und das Recycling, einschließlich aller in den jeweiligen Phasen inbegriffenen Dienstleistungen. Durch die Verfügbarkeit und Vernetzung aller relevanten Informationen in Echtzeit entsteht eine dynamische und unternehmensübergreifende Wertschöpfung, die sich bezüglich Kosten, Verfügbarkeit und Ressourcenverbrauch optimieren lässt [99, 27].

Aktuelle wissenschaftliche und technologische Fortschritte der Industrie 4.0 fokussieren sich auf die virtuelle Welt. Es werden digitale Abbilder der physikalischen Welt entwickelt (z.B. Maschinen, Produktionshallen oder Nutzungsszenarien von Produkten). Diese Abbilder verarbeiten reale und virtuelle Informationen von Prozessen, Produkten oder Dienstleistungen und ermöglichen eine erweiterte und differenziertere Analyse des Gesamtsystems [118]. Im Jahr 2025 sollen laut ITK-Branchenverband Bitkom alle digitalen Abbilder in der Fertigungsbranche zusammen ein wirtschaftliches Potenzial von über 78 Milliarden Euro aufweisen. Allerdings nur dann, wenn die Systeme künftig nicht nur miteinander vernetzt sind, sondern zusätzlich smarte Eigenschaften, wie zum Beispiel die Adaption auf äußere Bedingungen oder Selbstoptimierung, besitzen [28].

Durch die rasch fortschreitenden Entwicklungen in den Informations-, Kommunikations- und Sensortechnologien, ist deren Integration heutzutage selbst in kostengünstige Produkte möglich. Hierdurch sind diese Produkte in der Lage, ihren

eigenen Zustand sowie den Zustand ihrer Umgebung zu erfassen. In Verbindung mit der Fähigkeit die erfassten Daten selbst zu verarbeiten und zu kommunizieren, entstehen hybride, zugleich digitale und physische Systeme. In der Literatur existieren diverse Ausprägungen dieser hybriden technischen Systeme. Den Ursprung hat das Konzept in der Luft- und Raumfahrt mit dem Fokus auf Strukturdynamik und Materialwissenschaft [52]. Mit den Anfängen von Industrie 4.0 verlagerte sich der Schwerpunkt auf smarte Produkte, „Internet of Things“ und die Produktion. Für einen umfänglichen Überblick wird an dieser Stelle auf [95] verwiesen.

Für die vorliegende Arbeit ist ein hybrides technisches System angelehnt an [59] und [56] wie folgt definiert: Es existiert ein numerisches Modell, welches Teil einer umfassenden virtuellen Abbildung eines Produkts oder Prozesses ist. Mithilfe des Modells und der damit generierten Daten werden die Eigenschaften, der Zustand und das Verhalten des korrespondierenden realen Objekts beschrieben. Das Modell wird zusammen mit dem physischen System entwickelt und bleibt während des gesamten Produktlebenszyklus sein virtueller Gegenpart. Somit wird die reale und virtuelle Welt verbunden und eine erweiterte Analyse von Daten oder die Überwachung von Systemen ermöglicht. Weiterhin kann das strukturdynamische Modell in allen Phasen des Lebenszyklus an der Wertschöpfung beteiligt sein. In der Entwicklungsphase wird der Umgang mit komplexen Anforderungen und die Konzeptfindung unterstützt, das Produktdesign mit modellbasierten Methoden optimiert und durch Simulationen und Tests Entwicklungszyklen beschleunigt sowie Iterationen verringert. Später können die Effizienz und die Qualität in der Produktion gesteigert werden und im Betrieb sind Aussagen zur Verfügbarkeit der realen Objekte möglich. Beispielsweise können Wartungsintervalle auf die tatsächlich aufgetretenen Belastungen und exakten Betriebszeiten einer Anlage oder Maschine angepasst werden. Abschließend können die umfangreichen Daten aus den vorangegangenen Phasen des Lebenszyklus bei der Planung des Recyclings und für die Entwicklung einer neuen Produktgeneration genutzt werden. Damit trägt die Digitalisierung zu einer zunehmenden Verschmelzung der virtuellen und realen Welt bei.

## *Kapitel 2 Stand der Wissenschaft*

# Kapitel 3

## Systemtheoretische Grundlagen

Dieses Kapitel behandelt die wichtigsten Konzepte der Systemtheorie für lineare strukturdynamische Systeme. Diese Kenntnisse sind für das Verständnis, der im folgenden Kapitel beschriebenen mechanischen und mechatronischen Systeme sowie der Methoden zur Modellordnungsreduktion, notwendig. Die Betrachtungen in diesem Kapitel beschränken sich auf deterministisch beschreibbare, lineare und nicht sprungfähige Systeme, deren Verhalten durch folgende Grundgleichung gekennzeichnet ist:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.1)$$

Der Vektor  $\mathbf{q}$  und seine zeitlichen Ableitungen ( $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ ) beschreiben den Bewegungszustand des dynamischen Systems, welcher sich aufgrund der äußeren Belastungen  $\mathbf{F}$  einstellt. Die in diesem Kapitel zusammengefassten Grundlagen der Systemtheorie orientieren sich an den Ausführungen einer Vielzahl von verfügbaren Lehrbüchern, wie beispielsweise [85, 108, 67, 117, 7, 114, 53, 55].

### 3.1 Beschreibung linearer dynamischer Systeme

Für die Modellbildung und Simulation mechanischer und mechatronischer Systeme existieren diverse Methoden und Verfahren. Diese führen, wie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben, häufig zu Systemen einfacher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In der Strukturmechanik hat sich die Darstellungsform eines Systems zweiter Ordnung bewährt, da die Zuordnung der Systemmatrizen zu den physikalischen Eigenschaften der Struktur eindeutig ist. In der Regelungstechnik und für viele Methoden der Modellordnungsreduktion (MOR) hat sich hingegen die Darstellungsform als System erster Ordnung (Zustandsraumdarstellung) durchgesetzt.

Das Gleichungssystem zweiter Ordnung kann als ein lineares Deskriptorsystem

oder verallgemeinertes Kontrollsystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}^{in}\mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_1^{out}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}_2^{out}\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.3)$$

dargestellt werden. Hierbei ist  $t \in \mathbb{R}^+$  die Zeitvariable und die Vektorfunktionen  $\mathbf{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$  beschreiben die inneren Zustände, die Eingänge und die Ausgänge des Systems. Die Systemordnung  $n$  stellt die Dimension der Systemmatrizen dar. Die Anzahl der Ein- bzw. Ausgänge wird durch  $k$  und  $l$  gekennzeichnet. In strukturmechanischen Systemen repräsentieren die reellen Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix. Für Systeme mit regulärer Massenmatrix  $\mathbf{M}$  entspricht Gleichung (3.2) einem gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Durch Multiplikation der inversen Massenmatrix wird ein allgemeines lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung gebildet. Eine Zeitvarianz des Systems äußert sich dadurch, dass die Systemmatrizen  $\mathbf{M}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$ ,  $\mathbf{B}^{in}(t)$  und  $\mathbf{B}^{out}(t)$  wie der Zustandsvektor ebenfalls abhängig von der Zeitvariablen  $t$  sind.

Für die Anwendung von MOR-Algorithmen ist es häufig notwendig die Differentialgleichungen in ein System erster Ordnung zu transformieren. Diese Darstellung eignet sich zudem gut für die elektronische Rechentechnik, da insbesondere numerische Solver diese Gleichungssysteme effizient lösen. Durch Substitution mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

wird das System zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung überführt. Dadurch vergrößert sich die Dimension des Systems auf  $2n$ . Die Gleichung (3.5) zeigt die allgemeine Zustandsraumdarstellung für kontinuierliche Systeme,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hierbei werden die inneren Zustände durch die Vektorfunktion  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  beschrieben. Die Matrizen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^{in} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{B}_2^{out} \quad \mathbf{B}_1^{out}] \quad (3.6)$$

werden als Systemmatrix, Steuermatrix und Beobachtungsmatrix bezeichnet. Die Durchgangsmatrix  $\tilde{\mathbf{D}}$  ist für nicht sprungfähige Systeme immer gleich null.

Insbesondere für die Implementierung des Zustandsraummodells auf Digitalrechnern ist anstelle eines kontinuierlichen Verlaufs nur der Systemzustand zu diskreten Zeitpunkten interessant. In diesem Fall ersetzen Differenzgleichungen die Zustandsdifferentialgleichungen und  $\mathbf{x}(t)$  wird entsprechend zu einer Folge von Vektoren



$\mathbf{x}(k)$ .

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k)\end{aligned}\quad (3.7)$$

Die diskrete Form (3.7) ist besonders für Berechnungen in Echtzeit geeignet, da zunächst die Ausgangsgleichung und erst im Anschluss die Zustandsdifferenzengleichung zur Ermittlung der Zustände für den nächsten Berechnungsschritt berechnet wird. Zudem sind für die Berechnung des nächsten Zeitschritts nur Matrizenmultiplikationen und -additionen notwendig [86]. Die Systemmatrizen des zeitdiskreten Modells können mit  $\zeta = (k+T) - \tau$  und  $d\zeta = -d\tau$  wie folgt bestimmt werden

$$\mathbf{A}_d = e^{\tilde{\mathbf{A}}T}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\tilde{\mathbf{A}}\zeta} d\zeta \tilde{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{C}_d = \tilde{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{D}_d = \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.8)$$

Die Parameter  $T$  und  $\tau$  entsprechen dabei der Abtastzeit sowie der Integrationsvariable.

## 3.2 Übertragungsverhalten

Die Beschreibung und die Analyse dynamischer Systeme im Frequenzbereich basieren auf der Zerlegung der Zeitbereich-Signale in sinusförmige Elementarsignale. Ein übliches Hilfsmittel hierzu ist die Laplace-Transformation  $\mathcal{L} : f(t) \rightarrow F(s)$ , mit  $s \in \mathbb{C}$  [129]. Durch diese Abbildung wird eine gegebene Funktion  $f(t)$  im Zeitbereich in eine Funktion  $F(s)$  im Frequenzbereich überführt. Die Laplace-Transformation ist wie folgt definiert

$$F(s) = \mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3.9)$$

Bei Existenz der Laplace-Transformation entspricht die Differentiation und Integration im Zeitbereich (reeller Originalbereich) den einfachen algebraischen Operationen Multiplikation und Division im Frequenzbereich (komplexer Bildbereich). Die Analyse von  $F(s)$  liefert häufig wesentlich bessere physikalische Einblicke in das Verhalten linearer Systeme. Insbesondere lassen sich die Resonanz- und Nullstellen dynamischer Systeme im Frequenzbereich einfacher untersuchen.

Wird die Laplace-Transformation unter Verwendung der Anfangsbedingung

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{u}(0) = 0 \quad (3.10)$$

auf die systembeschreibenden Gleichungen (3.2) und (3.3) angewendet, resultiert folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{Q}(s) &= \mathbf{B}^{in} \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= (\mathbf{B}_1^{out} + s \mathbf{B}_2^{out}) \mathbf{Q}(s)\end{aligned}\quad (3.11)$$

mit den Laplace-Transformierten  $\mathbf{Q}(s)$ ,  $\mathbf{U}(s)$  und  $\mathbf{Y}(s)$  der jeweiligen Vektoren  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$ . Hieraus ergibt sich durch Umstellen die Übertragungsfunktion des Systems

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = (\mathbf{B}_1^{out} + s\mathbf{B}_2^{out}) (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}^{in}. \quad (3.12)$$

Die Systemanalyse im Frequenzbereich ist für bestimmte Fragestellungen anschaulicher und einfacher als die Analyse im Zeitbereich. Ist ein dynamisches System und der Verlauf der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  gegeben, ermöglicht das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren folgendes Vorgehen. Zunächst werden die Eingangsgrößen in sinusförmige Anteile zerlegt, danach die Systemantworten für jeden einzelnen Anteil von  $\mathbf{u}(t)$  berechnet und abschließend der Verlauf der Ausgangsgrößen durch Überlagerung der berechneten Systemantworten gebildet.

### 3.3 Eigenschaften dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt erfolgt die Darstellung der für die vorliegende Arbeit wichtigsten Eigenschaften von dynamischen Systemen. Die Begriffe der Stabilität und der Passivität sowie das Konzept der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit werden vorgestellt. Es wird sich dabei auf die ingenieurtechnische Interpretation beschränkt und auf eine mathematisch vollständige Einführung verzichtet. Die Ausführungen orientieren sich an [117, 85, 86, 93].

#### 3.3.1 Stabilität

Unter Stabilität wird die Eigenschaft eines dynamischen Systems verstanden, auf eine beschränkte Erregung mit einer beschränkten Antwort zu reagieren. In der Literatur finden sich zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen, die Zustandsstabilität und die Eingangs-Ausgangs-Stabilität. Zustandsstabilität ist gegeben, wenn das System von einem ausgelenkten Anfangszustand wieder in die Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$  zurückkehrt. Wird das System von außen durch eine Eingangsgröße erregt und besitzt eine betragsbeschränkte Ausgangsgröße wird von Eingangs-Ausgangs-Stabilität gesprochen.

Das Kriterium für die Zustandsstabilität ist ein stabiler Gleichgewichtszustand  $\mathbf{x}_g$  des Systems. Dieser Zustand existiert, wenn für die Eigenwerte  $\lambda_i$  des Eigenwertproblems

$$\lambda \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{v}, \quad (3.13)$$

mit den Eigenvektoren  $\mathbf{v}$  und der Systemmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  aus Gleichung (3.5), die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.14)$$

erfüllt ist. Asymptotisch stabil ist das System, wenn alle Eigenwerte die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.15)$$

erfüllen. Das Kriterium für die Eingangs-Ausgangs-Stabilität lässt sich mit Hilfe der Übertragungsfunktion  $\mathbf{H}(s)$  des Systems anwenden. Das System ist genau dann Eingangs-Ausgangs-stabil, wenn sämtliche Pole  $s_i = \delta_i \pm j\omega_i$  seiner Übertragungsfunktion (3.12) der Ungleichung

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.16)$$

mit den Abklingkonstanten  $\delta_i$  und Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  genügen. Im Gegensatz zur Zustandsstabilität dürfen keine Pole mit verschwindendem Realteil auftreten. Aus den Gleichungen (3.15) und (3.16) lässt sich ableiten, dass ein asymptotisch stabiles System auch Eingangs-Ausgangs-stabil ist.

#### 3.3.2 Passivität

Passivität beschreibt die Eigenschaft eines dynamischen Systems keine Energie erzeugen zu können. Dies bedeutet, dass die im System gespeicherte Energie zu keinem Zeitpunkt größer als die Summe der anfangs gespeicherten und der zugeführten Energie sein darf. Für mechanische Strukturen ist Passivität ebenso wie Stabilität meist inhärent gegeben. Für mechatronische Systeme, die Quellen enthalten, oder für nicht-lineare Systeme können die Stabilitätskriterien nicht ausreichend sein. Das Gesamtsystem muss hierbei mindestens die Energie der Quellen dissipieren.

Folgende Kriterien sind nach [44, 131] für die Passivität linearer Systeme (3.2) notwendig und hinreichend:

1. Jedes Element von  $\mathbf{H}(s)$  ist reell für  $\operatorname{Re}\{s\} > 0$
2.  $\mathbf{H}^H(s) + \mathbf{H}(s) \geq 0$  für  $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  mit der hermiteschen Matrix  $\mathbf{H}^H(s)$

Eine Matrix, die diese Anforderungen erfüllt wird auch positiv reell genannt.

#### 3.3.3 Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind für die Analyse dynamischer Systeme und insbesondere für den Regelungsentwurf von Bedeutung. Diese beiden Eigenschaften beschreiben die Beeinflussbarkeit der Zustandsgrößen durch die Eingangsgrößen sowie die Wirkung der Zustandsgrößen auf die Ausgangsgrößen eines Systems. Hierbei werden die Eigenschaften der jeweiligen Zustandsgrößen miteinander verglichen. Die Aussagen zur Steuer- und Beobachtbarkeit liefern jedoch noch keine Anhaltspunkte wie gut die Systeme steuer- bzw. beobachtbar sind oder wieviel Energie hierzu benötigt wird.

Ein dynamisches System (3.5) heißt vollständig steuerbar, wenn eine Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  existiert, die das System aus einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in endlicher

Zeit in einen beliebig vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{x}_e$  überführt. In der Literatur finden sich verschiedene Kriterien zur Überprüfung der Steuerbarkeit. Das von Kalman vorgeschlagene Kriterium ist erfüllt, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{W}_c = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

den Rang  $n$  besitzt:

$$\text{rang}(\mathbf{W}_c) = n. \quad (3.18)$$

Die Überprüfung des Kriteriums nach Kalman erfolgt über die Berechnung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{W}_c$  mit

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\tilde{\mathbf{A}}^T + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Ist die Matrix  $\mathbf{W}_c$  regulär und positiv definit, ist auch das Kalman-Kriterium erfüllt [86].

### 3.3.4 Beobachtbarkeit

Ein dynamisches System (3.5) heißt vollständig beobachtbar, wenn ein Zustand  $\mathbf{x}(t)$  aus den bekannten Verläufen der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t)$  und der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  berechnet werden kann. Analog zu dem Steuerbarkeitskriterium ist das von Kalman eingeführte Beobachtbarkeitskriterium erfüllt, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{W}_o = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^2 & \dots & \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \end{pmatrix}^T \quad (3.20)$$

den Rang  $n$  besitzt:

$$\text{rang}(\mathbf{W}_o) = n. \quad (3.21)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, ist die Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{W}_o$  mit

$$\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}^T\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

regulär und positiv definit.

Die Untersuchung der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit durch die Berechnung der Gramschen Matrizen ist vorteilhaft, da die Gleichungen (3.19) und (3.22) die Form von Lyapunov-Gleichungen besitzen und hierfür gut entwickelte Lösungsverfahren existieren [85, 86].

## 3.4 Gütekriterien und Normen

An dieser Stelle werden die in dieser Arbeit verwendeten Systemnormen und Kriterien zur Bewertung der Modellgüte eingeführt. Eine wiederkehrende Aufgabe in dieser

Arbeit ist die Approximation dynamischer Systeme. Die Systemnormen werden dabei als Maß der Approximationsgüte genutzt. Weiterhin werden Methoden zum systematischen bewertenden Vergleich zweier dynamischer Systeme vorgestellt. Detaillierte Informationen sind in [53, 85, 86, 7, 49, 75] zu finden.

### 3.4.1 Systemnormen

Zur Definition von Systemnormen werden lineare, zeitinvariante Systeme der Form (3.5) betrachtet. Wichtige Normen zur Analyse von Systemen sind die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm, die  $\mathcal{H}_2$ -Norm und die Hankel-Norm, welche mit Hilfe der Hankel-Singulärwerte des Systems bestimmt werden kann.

Die Hankel-Norm eines System ist das Maß für die Menge an gespeicherter Energie basierend auf allen vergangenen Eingängen und zukünftigen Ausgängen. Sie ist definiert durch

$$\|H\|_h = \sup \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}, \text{ mit } \begin{cases} u(t) = 0 \text{ für } t > 0, \\ y(t) = 0 \text{ für } t < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Für ein gegebenes System (3.5) lässt sich die Hankel-Norm mit Hilfe der Gramschen Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix berechnen. Die Rechenvorschrift lautet

$$\|H\|_h = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)}, \quad (3.24)$$

wobei  $\lambda_{\max}(\cdot)$  den größten auftretenden Eigenwert beschreibt. Aus (3.24) folgt, dass die Hankel-Norm dem betragsgrößten Hankel-Singulärwert des Systems entspricht.

Eine weitere Norm zur Analyse von dynamischen Systemen ist die  $\mathcal{H}_2$ -Norm. Sie ist definiert durch

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (H(i\omega))^2 d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} (h(t))^2 dt} \quad (3.25)$$

Die  $\mathcal{H}_2$ -Norm ist die Wurzel der Summe der quadratischen Amplitude aller Elemente von  $H$ . Damit ist sie ein Maß für die in der Impulsantwort enthaltenen Energie und kann als durchschnittliche Verstärkung des Systems über alle Frequenzen interpretiert werden. Die Berechnung kann ebenfalls unter Verwendung der Gramschen Matrizen erfolgen.

$$\|H\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{W}_c)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_o)} \quad (3.26)$$

wobei beim Vergleich der dynamischen Systeme mit ihren ordnungsreduzierten Approximationen üblicherweise auch der relative Fehler

$$e_{\mathcal{H}_2} = \frac{\|H\|_2 - \|H_{ROM}\|_2}{\|H\|_2} \quad (3.27)$$

mit angegeben wird.

### 3.4.2 Gütekriterien zur Modellvalidierung

In der vorliegenden Arbeit wird die Approximationsgüte und Validität der ordnungs-reduzierten Modelle (ROM) anhand zwei unterschiedlicher grafischer Darstellungen beurteilt. Mit dem „Modal Assurance Criterion“ (MAC) wird die Korrelation der Eigenmoden der Systeme bewertet und mit Frequenzkennliniendiagrammen werden die jeweiligen Amplitudenverstärkungen und die Phasenverschiebungen der Systeme in Abhängigkeit von der Frequenz verglichen.

#### Modal Assurance Criterion

Das MAC ist ein statistischer Indikator anhand dessen die Korrelation von zwei Eigenvektoren bzw. Eigenformen beschrieben wird. Es reagiert relativ unempfindlich auf kleine Unterschiede und weist auf Konsistenz sowie Ähnlichkeit von zwei Vektoren hin. Dabei berücksichtigt das MAC nur modale Formen, was bedeutet, dass ein separater Frequenzvergleich in Verbindung mit dem MAC-Wert verwendet werden muss, um beispielsweise eine Aussage über die Lage der Eigenfrequenzen zu erhalten. Berechnet werden die MAC-Werte für alle Eigenvektorkpaare  $\Phi_i, \Phi_j$  der beiden Systeme durch die folgende Gleichung:

$$\text{MAC}_{(i,j)} = \frac{|\Phi_i^T \Phi_j|^2}{(\Phi_i^T \Phi_i)(\Phi_j^T \Phi_j)}. \quad (3.28)$$

Der MAC-Wert kann Werte zwischen null und eins annehmen. Für  $\text{MAC} = 1$  korrelieren die Eigenvektoren vollständig, je kleiner der MAC-Wert wird, desto geringer ist die Übereinstimmung. In der praktischen Anwendung ist ab einem Wert von  $\text{MAC} > 0.8$  von einer guten Übereinstimmung auszugehen. Üblicherweise werden alle MAC-Werte der Eigenvektorkpaare in einer Matrix zusammengefasst und als 2D-Grafik (3.1a) dargestellt.

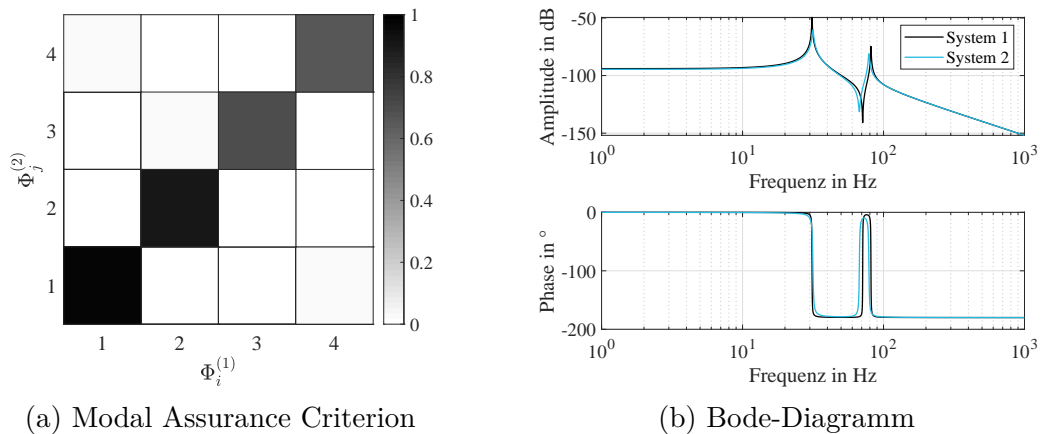


Abbildung 3.1: Grafische Verfahren zum Vergleich dynamischer Systeme

### Frequenzkennliniendiagramm

Das Frequenzkennliniendiagramm oder BODE-Diagramm besteht aus getrennten Darstellungen des Betrages und der Phase der Übertragungsfunktion aus Gleichung (3.12) in Abhängigkeit von der Frequenz. Die beiden Kennlinien werden als Amplitudengang bzw. Phasengang bezeichnet (Abb. 3.1b). Die Ordinate des Amplitudengangs wird häufig in Dezibel (dB) aufgetragen, wobei sich der in Dezibel angegebene Betrag auf einen angegebenen Referenzwert bezieht. Die Kennlinienverläufe beschreiben die Amplitudenverstärkung und die Phasenverschiebung am Ausgang  $y$ , bei Anregung am Eingang  $u$  eines Systems (Gl. 3.2 und 3.3). Es entstehen  $m \times r$  Diagramme, die ein System mit  $m$  Eingängen und  $r$  Ausgängen vollständig beschreiben.

### *Kapitel 3 Systemtheoretische Grundlagen*



# Kapitel 4

## Grundlagen der Modellordnungsreduktion

Die Bedeutung numerischer Simulationen nimmt in allen wissenschaftlichen und technischen Disziplinen stetig zu. Die durch die Modellbildung erhaltenen Zustandsgleichungen bilden den Ausgangspunkt für die anschließende Systemanalyse sowie den Reglerentwurf. Die Modellierung komplexer Systeme führt dabei typischerweise zu Differentialgleichungssystemen sehr hoher Ordnung. Diese Systemgröße macht die Analyse, Optimierung und Zeitbereichssimulation von Mehrdomänen-Systemen ineffizient oder teilweise sogar unmöglich. Dies gilt insbesondere für die Finite-Elemente-Methode, die eine sehr genaue Modellierung erlaubt und bei der durch die Diskretisierung eine große Anzahl systembeschreibender Gleichungen entsteht. Für eine schnelle Entwurfsprognose, einen Reglerentwurf oder eine Echtzeitsimulation ist es notwendig, das Ausgangsmodell mit hoher Systemordnung  $n$  durch eine geeignete Approximation mit entsprechend niedrigerer Ordnung  $r \ll n$  zu ersetzen.

Der grundsätzliche Ablauf der Modellordnungsreduktion für mechanische Systeme ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Ausgehend von einem mechanischen System, beschrieben durch ein digitales Konstruktionsmodell, wird ein Berechnungsmodell abgeleitet. Bei der Modellbildung kommen numerische Verfahren, wie die Finite-Elemente-Methode, die Randelementmethode oder die Mehrkörpersimulation sowie kombinierte Methoden zum Einsatz. Die hierbei entstehenden hochdimensionalen Modelle werden anschließend durch Methoden der Modellordnungsreduktion vereinfacht und stehen abschließend für effiziente Analyse- oder Optimierungsaufgaben zur Verfügung.

Ein hinreichend genaues ordnungsreduziertes Modell (ROM) ist dabei ein Rechenmodell, welches die wesentlichen Merkmale des höherdimensionalen Modells aufweist und in bedeutend geringerer Zeit gelöst werden kann. Zur Modellordnungsreduktion (MOR) gibt es grundsätzlich zwei Vorgehensweisen:

- Physikalische Modellvereinfachung und
- Mathematische Modellordnungsreduktion

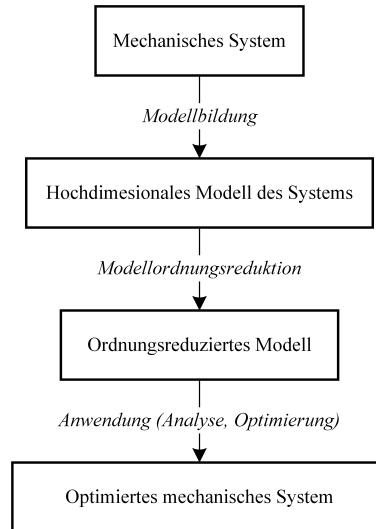


Abbildung 4.1: Grundsätzlicher Ablauf der Modellordnungsreduktion für mechanische Systeme

Im Folgenden werden die mathematischen bzw. systemtheoretisch motivierten Verfahren zur Modellordnungsreduktion betrachtet.

Ein Großteil der gegenwärtig etablierten MOR-Methoden sind projektive Verfahren, bei dem das Ausgangssystem der Ordnung  $n$  in einen Unterraum der Ordnung  $r$  projiziert wird. Die Voraussetzungen hierfür sind, dass die Dynamik zwischen Eingang und Ausgang des dynamischen Systems in einem definierten Zeit- oder Frequenzbereich erhalten bleibt und die Verfahren numerisch stabil und effizient sind. Grundsätzlich werden die Methoden hinsichtlich des zu betrachtenden Systemverhalten unterschieden. Die Mehrzahl der entwickelten Algorithmen setzen lineare und zeitinvariante Systeme voraus. Darüber hinaus werden auch Verfahren für nichtlineare Systeme entwickelt [110, 106, 43, 23, 127]. Diese werden in der vorliegenden Arbeit allerdings nicht näher betrachtet.

Dynamische Systeme in der Strukturdynamik müssen in der frühen Entwicklungsphase eines Produkts parametrierbar sein, um Variationen in Gestalt, Material, äußeren Belastung sowie Rand- und Anfangsbedingungen zu ermöglichen. Generell sind Methoden zur MOR in Bezug auf parametrische Variationen nicht notwendigerweise robust und jedes Mal, wenn ein Parameter im untersuchten System geändert wird, muss ein neues ROM erstellt werden. Dies beschränkt ihre Anwendbarkeit für die Konzeptfindung und Optimierung im Entwurfsablauf und die Simulation auf Systemebene stark. Daher ist es unerlässlich, Verfahren zur MOR von parametrischen Systemen zu entwickeln, die ein parameterabhängiges Systemverhalten mit reduzierter Ordnung berücksichtigen.

Mit Methoden zur parametrischen Modellordnungsreduktion (PMOR) wird genau dieses Ziel verfolgt, weshalb diese in den Ingenieurwissenschaften derzeit größere Bedeutung erlangen. Insbesondere liegt der Fokus dabei auf der Beibehaltung funktionaler Abhängigkeiten von wichtigen Konstruktionsparametern im ROM. Durch

effiziente Simulationen, welche im reduzierten Raum durchgeführt werden, können beispielsweise Entwurfsraumbewertungen und Optimierungsaufgaben deutlich schneller durchgeführt werden. Während sich die Methoden zur MOR bereits seit vielen Jahren etabliert haben und in kommerzieller Software implementiert wurden, befinden sich Verfahren zur PMOR noch im Reifegrad einer Zukunftstechnologie [20, 16, 120]. In den folgenden Abschnitten werden die wichtigsten Methoden dieser beiden Kategorien, welche die Basis des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens darstellen, beschrieben.

## 4.1 Grundprinzipien projektiver Verfahren

Die Mehrzahl der üblichen Methoden zur MOR basieren auf einer Koordinatentransformation, bei der das Ausgangssystem mittels Projektion in ein ordnungsreduziertes System überführt wird. Sie unterscheiden sich maßgeblich in der Art des Aufbaus der Projektionsmatrizen. In der Literatur werden diese Methoden häufig in die drei Kategorien

1. Substrukturierungstechniken (Guyan-Verfahren, Modales Abschneiden, Component Mode Synthesis)
2. Padé-Approximation und Krylov-Unterraumverfahren sowie
3. Balancierungstechniken

unterteilt [21, 7, 115].

Bei der MOR mittels projektiver Verfahren wird zunächst eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  bestimmt. Für die Systeme zweiter Ordnung aus Gleichung (3.2) gilt

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{w} + \epsilon \quad (4.1)$$

mit den Zustandsvektoren des ursprünglichen und des ordnungsreduzierten Systems  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ . Die Transformationsmatrix beschreibt den Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren und der entstehende Fehlerterm wird durch  $\epsilon$  dargestellt. Durch Einsetzen der Projektionsvorschrift in Gleichungen (3.2) und (3.3) wird das reduzierte lineare Deskriptorsystem

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{w}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{w}(t) = \bar{\mathbf{B}}^{in}\mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{B}}_1^{out}\mathbf{w}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2^{out}\dot{\mathbf{w}}(t) \quad (4.3)$$

erzeugt.

Der Überstich ( $\bar{\phantom{x}}$ ) kennzeichnet in den Gleichungen (4.2) und (4.3) die Matrizen

des ROM mit

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} \quad (4.5)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (4.6)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{in} = \mathbf{T}^T \mathbf{B}^{in} \quad (4.7)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{out} = \mathbf{B}^{out} \mathbf{T}. \quad (4.8)$$

Die beschriebene Transformation kann analog auch für Systeme erster Ordnung aus Gleichung (3.5) definiert werden. Wie in Abbildung 4.2 graphisch dargestellt, werden die Systemmatrizen aus der FEM hierbei aus einem  $2n$ - (grau) in einen  $2r$ -dimensionalen Unterraum (blau) überführt.

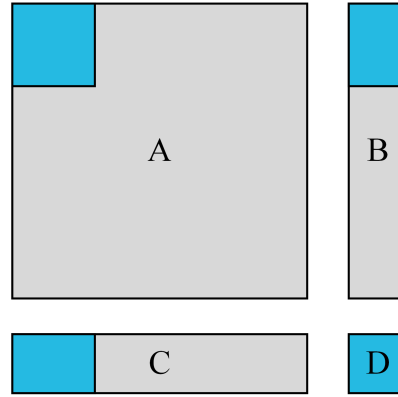


Abbildung 4.2: Projektion der Systemmatrizen in einen niederdimensionalen Unterraum

In den nachfolgenden Abschnitten wird ein Überblick über die relevanten Methoden zur Modellordnungsreduktion im Bereich der Strukturdynamik gegeben und die Theorie der Substrukturierungs- und Balancierungstechniken vorgestellt.

## 4.2 Projektive nicht-parametrische Verfahren

Die ersten und einfachsten Ansätze zur Modellordnungsreduktion wurden bereits vor knapp sechs Jahrzehnten vorgestellt. Diese basieren auf einer Kondensation der Steifigkeitsmatrix und der Überlagerung von Eigenmoden. Das Guyan-Verfahren [58] erweitert die **statische Kondensation** auf dynamische Systeme. Für diese MOR werden die Freiheitsgrade in innere (Slave) und äußere (Master) Freiheitsgrade unterteilt und sortiert. Die inneren Freiheitsgrade werden, da sie für die Berechnungen unerwünscht sind aus dem Gleichungssystem des Ausgangssystems (FOM) eliminiert. Hierbei wird das statische Verhalten der Struktur in einer reduzierten Steifigkeitsmatrix exakt abgebildet. In die ordnungsreduzierte Massenmatrix werden gemischte Massen- und Steifigkeitsterme integriert, wobei das dynamische Verhalten

der Struktur nicht oder nur unvollständig abgebildet wird. Die Eigenwerte und Eigenvektoren des dynamischen Systems weisen somit einen nicht prognostizierbaren Fehler auf.

In der Strukturdynamik gehören die **modalen Methoden** zur MOR zu den am häufigsten verwendeten Ansätzen, da sie eine geeignete Approximation des dynamischen Verhaltens ermöglichen. Grundidee aller modalen Verfahren ist die Transformation der physikalischen Koordinaten in den modalen Koordinatenraum. Hierzu werden die orthonormierten Eigenvektoren des FOM durch Lösen des Eigenwertproblems berechnet und in der Modalmatrix zusammengefasst. Die Transformation basiert anschließend auf ebendieser Modalmatrix und die berechneten Verformungen der Gesamtstruktur entstehen durch die Überlagerungen von Eigenvektoren. Dieses Vorgehen wird „Modale Synthese“ oder „Modale Superposition“ genannt [25]. Für Systeme mit linear unabhängigen Eigenvektoren und von null verschiedenen Eigenwerten sind die modale Steifigkeits- und Massenmatrix diagonal. Somit sind die Gleichungen des Systems im Modalraum entkoppelt, d.h. die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems entspricht der Überlagerung der Übertragungsfunktionen von entkoppelten Einmassenschwingern. Bei der „Modal Coordinate Reduction“ wird die modale Superposition mit modalem Abschneiden kombiniert. Für das FOM werden nur einige Eigenvektoren berechnet und daraus die Modalmatrix aufgebaut. Da für diese MOR eine Transformationsmatrix mit begrenzter Anzahl dynamischer Eigenmoden verwendet wird, weist das statische Verhalten des ROM einem signifikanten Fehler auf [109]. Dieser Fehler entspricht den statischen Residuen der nicht berücksichtigten Moden.

Aufbauend auf den Verfahren der statischen Kondensation wurden weitere Methoden entwickelt, die ebenfalls die dynamischen Effekte berücksichtigten. Zu der reduzierten Basis werden dabei zusätzliche dynamische Korrekturmoden hinzugefügt, die durch Rekonstruktion der vernachlässigten Moden berechnet werden. Eine vollständige Kompensation des statischen Fehlers wird allerdings nur möglich, wenn alle Eigenvektoren des FOM berechnet werden. Die bekanntesten Weiterentwicklungen sind die „Dynamische Kondensation“ [81], die „Improved Reduction System“ Methode [97] bzw. die „Iterated Improved Reduction System“ Methode [46] sowie der „System Equivalent Reduction Expansion Process“ [96].

Die **Component Mode Synthesis** (CMS) [34] ist eine gemischt statisch-modale MOR basierend auf der Kombination von Substrukturtechnik und modaler Superposition. Die mechanische Struktur wird in beliebig viele Komponenten aufgeteilt, die separat berechnet werden. Die Substrukturen werden im Anschluss wieder zu dem Gesamtsystem synthetisiert. Wie beim Guyan-Verfahren werden die jeweiligen Teilmodelle in innere und äußere Freiheitsgrade aufgeteilt. Die Verschiebungen der inneren Knoten setzen sich dabei zum einen aus den Beiträgen der statischen Kondensation der Master-Freiheitsgrade und zum anderen aus der modalen Superposition der inneren Freiheitsgrade bei fixierten Master-Freiheitsgraden zusammen.

In der Strukturdynamik besteht ein wesentlicher Vorteil der Substrukturierungstechniken darin, dass das FOM während der Berechnung nicht vollständig aufgebaut

werden muss. Die Substrukturen können unabhängig und parallel betrachtet werden. Ausgehend von der 1968 vorgestellten CMS wurde diese in den vergangenen Jahren in unterschiedliche Richtungen weiterentwickelt. Die „Improved Component Mode Synthesis Method“ [75] erlaubt beispielsweise die Kopplung von Starrkörpern und flexiblen Modellen. Erweiterte und insbesondere robustere Verfahren wurden in [112, 87, 103] vorgestellt. Weitere Forschungsarbeiten beschäftigten sich mit einer angepassten Methode basierend auf der Kopplung von Substrukturen mit freien Randfreiheitsgraden [111], hybriden Ansätzen in Verbindung mit einer Singulärwertzerlegung [33] und Steigerung der Effizienz der ROM durch mehrstufige oder kaskadierte Verfahren [29].

Die Methoden, die auf der Singulärwertzerlegung, balancierten Abschneiden oder dem Prinzip der Momentenanpassung basieren, wurden hauptsächlich im Rahmen der System- und Kontrolltheorie entwickelt. Diese Verfahren approximieren sowohl die statischen als auch die dynamischen Eigenschaften und besitzen insbesondere den Vorteil der Automatisierbarkeit. Zu Beginn der Forschungsarbeiten wurden diese Verfahren zur Reduktion von Differentialgleichungssystemen erster Ordnung entwickelt [7]. Mittlerweile existieren aber auch erweiterte Ansätze zur MOR von Systemen zweiter Ordnung [10, 11, 115]. Die generelle Idee besteht darin, bestimmte Parameter des ROM und des FOM anzugleichen oder unwesentliche Zustände des System zu entfernen.

Die Methoden der Padé-Approximationen und **Krylov-Unterraumverfahren** basieren auf dem Prinzip der Momentenanpassung oder partiellen Realisierung. Es können auch sehr hochdimensionale Systeme reduziert werden, da hierbei die Übertragungsfunktion des FOM um einen oder mehrere Entwicklungspunkte in eine Potenzreihe entwickelt wird. Die Übertragungsfunktion des ROM wird so gewählt, dass die ersten Momente der Übertragungsfunktion bis zu einer festgelegten Ordnung mit denen des FOM übereinstimmen [54]. Die Modellgüte des ROM hängt dabei maßgeblich von den gewählten Entwicklungspunkten ab. Krylov-Unterraumverfahren stellen robuste und numerisch günstige Algorithmen dar, die sich insbesondere für die Reduktion sehr großer Systeme eignen. Der Nachteil dieser Verfahren ist, dass keine Aussage über die Erhaltung der Stabilität und der Passivität getroffen werden kann [8, 116]. Numerisch stabilere Verfahren, wie zum Beispiel der „PRIMA“ Algorithmus [98], können die Stabilität und Passivität bestimmter Systeme erhalten.

**Balancierungstechniken** basieren auf der Idee Zustände zu eliminieren, die entweder viel Energie benötigen, um angeregt zu werden oder nur wenig Ausgangsenergie erzeugen [92]. Die ROM werden somit durch das Vernachlässigen von schlecht beobachtbaren und schlecht steuerbaren Zuständen erzeugt. Die Wahl der reduzierten Dimension kann dabei anhand der Norm der Hankel-Singulärwerte des ROM erfolgen. Im Gegensatz zu den anfangs vorgestellten MOR haben Balancierungstechniken eine global definierbare Fehlerschranke und erhalten die Stabilität des FOM [7, 57]. Die Berechnung der Hankel-Singulärwerte aus der Gramschen Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsmatrix erfordert allerdings das direkte Lösen der Lyapunov-Gleichung, woraus sich ein hoher numerischer Rechenaufwand ergibt. Dadurch sind diese

Verfahren in der üblichen Implementierung nur für Systeme mit einigen tausend Freiheitsgraden anwendbar [8].

Um den Aufwand der Berechnung zu verringern wurden Verfahren entwickelt, die mit Hilfe von iterativen Solvern die Lyapunov-Gleichung lösen und somit auf der Approximation der Gramschen Matrizen basieren [19]. Da die Balancierungstechniken für Systeme erster Ordnung entwickelt wurden, sind sie nicht direkt auf Systeme zweiter Ordnung anwendbar. In [89] wurden erstmals erweiterte Verfahren vorgestellt, die das balancierte Abschneiden für Systeme zweiter Ordnung realisieren. Darauf aufbauend wurde dann die „Second Order Balanced Truncation“ Methode entwickelt [31].

Ein weiterer Ansatz, der auf einer Singulärwertzerlegung basiert, ist die „Proper Orthogonal Decomposition“ (POD) bzw. die „Karhunen-Loève-Zerlegung“ [83]. Hierbei wird das System mit einer konstanten Last beaufschlagt und die Zustandsgrößen zu festgelegten Zeitpunkten ermittelt. Diese sogenannten „Snapshots“ werden in einer Matrix zusammengefasst. Durch Singulärwertzerlegung wird aus dieser Matrix schließlich die Orthonormalbasis zur MOR aufgebaut. Diese Vorgehensweise eignet sich daher auch für nichtlineare Systeme, wobei zur Bestimmung der Zustandsgrößen eine Simulation des FOM notwendig ist.

### 4.2.1 Statische Kondensation

Für den Ansatz zur statischen Kondensation oder Guyan-Reduktion [58] werden die unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten des FE-Modells in innere Freiheitsgrade und äußere Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_i$  bzw.  $\mathbf{q}_m$  unterschieden. Mindestens alle Ein- und Ausgänge des Systems werden als Master-Freiheitsgrade definiert und stehen somit auch nach der MOR für die Analyse und die Systemerregung zur Verfügung. Durch die Aufteilung des Koordinatenvektors werden die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  entsprechend in vier Teilmatrizen und der Vektor der äußeren Lasten  $\mathbf{F}$  in zwei Teilvektoren unterteilt. Es ergibt sich die statische Gleichgewichtsgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{im} \\ \mathbf{C}_{mi} & \mathbf{C}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

wobei  $(\cdot)_i$  die inneren und  $(\cdot)_m$  die Master-Freiheitsgrade sowie die jeweils zugehörigen Teilmatrizen kennzeichnen. Da per Definition keine äußeren Lasten auf die inneren Freiheitsgrade wirken ( $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ ), wird die obere Zeile aus Gleichung (4.9) zu

$$\mathbf{C}_{ii}\mathbf{q}_i + \mathbf{C}_{im}\mathbf{q}_m = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Durch Umstellen der Gleichung (4.10) können die inneren Freiheitsgrade

$$\mathbf{q}_i = -\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{im}\mathbf{q}_m \quad (4.11)$$

in Abhängigkeit der äußeren Freiheitsgrade dargestellt und in die untere Zeile in Gleichung (4.9) eingesetzt werden. Dies führt zu dem reduzierten System linearer Differentialgleichungen

$$(\mathbf{C}_{mm} - \mathbf{C}_{mi}\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{im})\mathbf{q}_m = \mathbf{F}_m. \quad (4.12)$$

Durch die Systemgleichungen (4.12) wird die ursprüngliche Aufgabenstellung in Gleichung (4.9) exakt beschrieben, jedoch sind in der statisch kondensierten Formulierung alle inneren Freiheitsgrade eliminiert.

Die Projektionsmatrix der Guyan-Reduktion aus Gleichung (4.1) kann nun als Abbildung aller Freiheitsgrade auf die Master-Freiheitsgrade dargestellt werden. Für die lineare Transformation, die den reduzierten Raum auf den vollen Raum abbildet, gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{im} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}_m = \mathbf{T}_{sc}\mathbf{q}_m. \quad (4.13)$$

Aus den Gleichungen (4.12) und (4.13) lässt sich leicht erkennen, dass diese Methode zur MOR für statische Untersuchungen exakt ist. Da die Projektionsmatrix  $\mathbf{T}_{sc}$  ausschließlich auf der Basis der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  gebildet wird, lässt sich zur Eignung des ROM für dynamische Analysen keine Aussage treffen.

### 4.2.2 Modales Abschneiden

Beim Modalen Abschneiden wird das Differentialgleichungssystem (3.2) in generalisierte bzw. modale Koordinaten überführt. Die Transformationsvorschrift lautet

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{w}(t) \quad (4.14)$$

mit der Modalmatrix  $\mathbf{\Phi}$  und dem Vektor der modalen Freiheitsgrade  $\mathbf{w}(t)$ . Die Darstellung der Zeitabhängigkeit wird im Folgenden zugunsten einer besseren Lesbarkeit weggelassen. Durch Lösen des generalisierten Eigenwertproblems

$$\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_i = \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i \quad (4.15)$$

mit den Systemmatrizen aus Gleichung (3.2) und den Eigenwerten  $\lambda_i$  wird die Modalmatrix  $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_1, \dots, \mathbf{\Phi}_n]$  berechnet. Unter Verwendung dieser Matrix als Projektionsmatrix entsteht ein System von  $n$  entkoppelten Differentialgleichungen

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}^{in}\mathbf{u} \quad (4.16)$$

Sind die Eigenvektoren massennormiert und die Dämpfungsmatrix durch eine Linearkombination von Steifigkeits- und Massenmatrix angenähert, gilt

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \text{diag}(2\vartheta\omega_0)\dot{\mathbf{w}} + \text{diag}(\omega_0^2)\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}^{in}\mathbf{u} \quad (4.17)$$



## 4.2 Projektive nicht-parametrische Verfahren

mit dem Lehrschen Dämpfungsmaß  $\vartheta$  und den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$ . Die Gleichungen (4.16) und (4.17) beschreiben das FOM der Dimension  $n$ , für das entsprechend viele Eigenvektoren existieren.

Da die Systemmatrizen nun diagonal besetzt sind und Parameter zu  $n$  entkoppelten Gleichungen beinhalten, können einem Eigenwert zugehörige Zeilen und Spalten der modal transformierten Matrizen abgeschnitten werden. In der Praxis werden durch iterative Solver häufig nur eine bestimmte Anzahl der kleinsten Eigenwerte und -vektoren berechnet. Die reduzierte modale Basis  $\Phi_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$  wird folglich nur durch die ersten  $r$  Eigenmoden beschrieben. Durch die Transformation der physikalischen Freiheitsgrade

$$\mathbf{q} = \Phi_r \bar{\mathbf{w}} + \epsilon \quad (4.18)$$

und der Systemmatrizen aus Gleichung (3.2) entsteht ein System mit  $r \ll n$  entkoppelten Differentialgleichungen

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{B}} \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{w}} = \Phi_r^T \mathbf{B}^{in} \mathbf{u}. \quad (4.19)$$

Für die Matrizen und die modalen Koordinaten des ROM gilt  $\bar{\mathbf{M}} = \Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_r$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \Phi_r^T \mathbf{B} \Phi_r$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \Phi_r^T \mathbf{C} \Phi_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  sowie  $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^r$ . Die Modellgüte des ROM hängt dabei von der Anzahl der berücksichtigten Eigenvektoren und dem betrachteten Frequenzbereich ab.

### 4.2.3 Component Mode Synthesis

Analog zur statischen Kondensation (Abschnitt 4.2.1) wird der Vektor der physikalischen Koordinaten  $\mathbf{q}$  bei der Component Mode Synthesis in innere und Master-Freiheitsgrade unterteilt. Darüber hinaus wird bei diesem Verfahren der Einfluss der Massenkkräfte des dynamischen Systems berücksichtigt. Das Vorgehen ist dabei vergleichbar mit dem des Modalen Abschneidens (Abschnitt 4.2.2). Für die ungedämpfte Bewegungsgleichung des Systems (vgl. Gleichung 3.2) gilt folglich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{im} \\ \mathbf{M}_{mi} & \mathbf{M}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{im} \\ \mathbf{C}_{mi} & \mathbf{C}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Die Indizes  $(\cdot)_i$  und  $(\cdot)_m$  kennzeichnen, wie bei der statischen Kondensation, die inneren bzw. Master-Freiheitsgrade sowie die jeweils zugehörigen Teilmatrizen. Für die Berechnung des modalen Anteils der Projektionsmatrix werden alle Master-Freiheitsgrade fixiert ( $\mathbf{q}_m = \mathbf{0}$ ). Aus Gleichung (4.20) wird für die inneren Freiheitsgrade die Gleichung

$$\mathbf{M}_{ii} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_{ii} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i \quad (4.21)$$

abgeleitet und in generalisierte Koordinaten transformiert. Dazu wird das Eigenwert-

problem

$$\mathbf{C}_{ii}\Phi_{i,n} = \lambda_{i,n}\mathbf{M}_{ii}\Phi_{i,n}^s \quad (4.22)$$

gelöst und eine reduzierte modale Basis  $\Phi_{i,r}$  mit  $r \ll n$  bestimmt. Die korrespondierende lineare Transformation lautet

$$(\mathbf{q}_i)_{dyn} = \bar{\Phi}_{i,r}\bar{\mathbf{w}}_i \quad (4.23)$$

mit  $\bar{\Phi}_{i,r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .

Der statische Anteil der Transformationsmatrix wird analog zu Gleichung (4.9) aus der statischen Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{im} \\ \mathbf{C}_{mi} & \mathbf{C}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{im} \\ \mathbf{I}_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

mit den sogenannten Zwangsdeformationen

$$\Psi_{im} = -\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{im} \quad (4.25)$$

ermittelt. Somit können die inneren Freiheitsgrade in Abhängigkeit der Master-Freiheitsgrade wie folgt dargestellt werden:

$$(\mathbf{q}_i)_{stat} = \Psi_{im}\mathbf{q}_m. \quad (4.26)$$

Die Gesamtverschiebung der physikalischen Freiheitsgrade ergibt sich durch Superposition des statischen und dynamischen Anteils aus den Gleichungen (4.23) und (4.26) zu

$$\mathbf{q}_i = (\mathbf{q}_i)_{dyn} + (\mathbf{q}_i)_{stat} \quad (4.27)$$

Folglich kann die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{cms}$  des CMS-Verfahrens durch

$$\mathbf{T}_{cms} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i & \Psi_{im} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

und die Transformationsvorschrift aus Gleichung (4.1) durch

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{cms} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_i \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} + \epsilon \quad (4.29)$$

beschrieben werden.

#### 4.2.4 Krylov-Unterraumverfahren

Krylov-Unterraumverfahren basieren auf einer Approximation der Übertragungsfunktion des Systems im Frequenzraum. Hierzu wird das System zweiter Ordnung aus Gleichungen (3.2) und (3.3) mit Hilfe der Substitution

$$\check{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \check{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{in} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \check{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^{out} & \mathbf{B}_1^{out} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

in die verallgemeinerte Zustandsraumdarstellung der Form

$$(s\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{G}})\mathbf{Q}(s) = \check{\mathbf{B}}\mathbf{U}(s) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \check{\mathbf{L}}\mathbf{Q}(s) \quad (4.32)$$

überführt. Für die dazugehörigen Übertragungsfunktion

$$\mathbf{H}(s) = \check{\mathbf{L}}(s\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{G}})^{-1}\check{\mathbf{B}} \quad (4.33)$$

wird angenommen, dass das Matrixbüschel  $s\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{G}}$  regulär für alle betrachteten Entwicklungspunkte  $s$  ist. Wird  $s \in \mathbb{C}$  so gewählt, dass die Inverse  $(s\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{G}})^{-1}$  existiert, kann die Übertragungsfunktion nach

$$\mathbf{H}(s) = \check{\mathbf{L}}(\mathbf{I} + (s - s_0)\check{\mathbf{A}})^{-1}\check{\mathbf{R}} \quad (4.34)$$

mit  $\check{\mathbf{A}} = -(s_0\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{G}})^{-1}\check{\mathbf{C}}$  und  $\check{\mathbf{R}} = (s_0\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{G}})^{-1}\check{\mathbf{B}}$  umgeformt werden. Diese Darstellung ist notwendig, um mit Hilfe einer Neumann-Reihen-Entwicklung

$$(\mathbf{I} + (s - s_0)\check{\mathbf{A}})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( (s - s_0) \check{\mathbf{A}} \right)^i \quad (4.35)$$

eine Potenzreihendarstellung der Übertragungsfunktion zu berechnen.

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i (s - s_0)^i \quad (4.36)$$

Dabei werden die Koeffizienten  $m_i = \check{\mathbf{L}}\check{\mathbf{A}}^i\check{\mathbf{R}}$  als Momente bezeichnet.

Es soll nun ein reduziertes System der Dimension  $r \ll n$  gefunden werden, für das die Momente der Übertragungsfunktion  $\mathbf{H}_r(s)$  mit

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_r(s) + \mathcal{O}\left((s - s_0)^{2r}\right) \quad (4.37)$$

bis zu einer bestimmten Ordnung mit den Momenten der Ausgangs-Übertragungsfunktion des FOM übereinstimmen. Diesen Prozess nennt man Momentenanpassung. Es ist zu beachten, dass die Neumann-Reihe der Übertragungsfunktion und somit auch  $\mathbf{H}_r(s)$  nur in der Umgebung des Entwicklungspunktes eine gute Approximation

liefert.

Die direkte Methode zur Bestimmung der Übertragungsfunktion mit dem Entwicklungspunkt  $s_0 = 0$  heißt Padé-Approximation. Sie ist definiert als rationale Funktion

$$H_r(s) = \frac{a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0}{b_rs^r + \dots + b_1s + 1} \quad (4.38)$$

Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass das explizite Berechnen der Momente numerisch nicht stabil ist [45]. Krylov-Unterraumverfahren kommen unter Verwendung von Lanczos- oder Arnoldi-Methoden dagegen ohne die explizite Berechnung der Momente aus.

#### 4.2.5 Balanciertes Abschneiden

Das balancierte Abschneiden ist ein Verfahren zur MOR, das auf der balancierten Realisierung [92] basiert. Im Gegensatz zu der Methode des modalen Abschneidens kann das balancierte Abschneiden als Annäherungsverfahren eingestuft werden. Anstatt nur die hochfrequenten Eigenwerte zu eliminieren, wird ein ROM mit möglichst guter Abbildung des dynamischen Verhaltens des FOM ermittelt. Das Vorgehen besteht aus drei Schritten: Das Systems wird in eine balancierte Realisierung transformiert, die Hankel-Singulärwerte  $\sigma$  werden berechnet und die schlecht steuerbaren oder schlecht beobachtbaren Zustände werden abgeschnitten.

Das Kennzeichen der balancierten Realisierung ist, dass die Gramschen Matrizen  $\mathbf{W}_c$  und  $\mathbf{W}_o$  aus Gleichungen (3.19) und (3.22) diagonal und identisch sind.

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Die Gramschen Matrizen sind ein Maß für die Steuer- und Beobachtbarkeit und spiegeln den Energieinhalt eines Systemzustands wider. In einem balancierten System lassen sich die Hankel-Singulärwerte direkt aus den Gramschen Matrizen auslesen. Als Kriterium für das Abschneiden wird der Betrag der Hankel-Singulärwerte genutzt. Konsequenterweise werden die Zustände mit einem hohen Energieübertrag von den Eingängen zu den Ausgängen des Systems beibehalten und Zustände mit einem niedrigen Energieniveau eliminiert.

Die zur MOR verwendete Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}_c \mathbf{V} \mathbf{\Delta}^{-1/2} \quad (4.40)$$

wird aus der Cholesky-Zerlegung der Gramschen Matrizen

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{L}_c^T, \quad \mathbf{W}_o = \mathbf{L}_o \mathbf{L}_o^T \quad (4.41)$$

und der Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{L}_o^T \mathbf{L}_c = \mathbf{U} \mathbf{\Delta} \mathbf{V}^T \quad (4.42)$$

bestimmt. Das balancierte Abschneiden wird abschließend gemäß Gleichung (4.1) auf ein System erster Ordnung (Gleichung (3.5)) angewendet.

## 4.3 Parametrische Modellordnungsreduktion

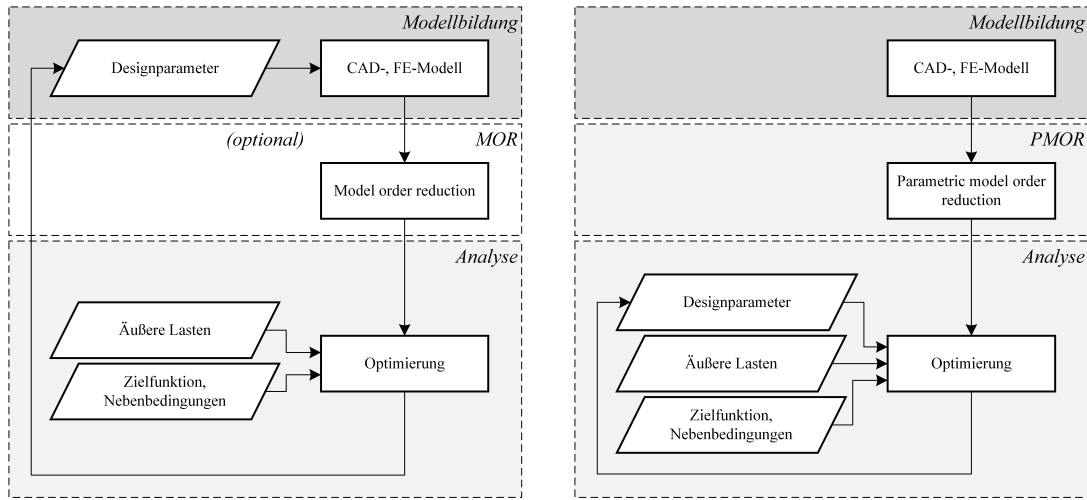
### 4.3.1 Literaturübersicht

Ausgehend von den Methoden zur Modellordnungsreduktion, die im voranstehenden Abschnitt 4 vorgestellt wurden, werden nachfolgend Verfahren der parametrischen Modellordnungsreduktion (PMOR) besprochen. Zunächst werden die Motivation und die grundlegende Idee beschrieben und anschließend die wichtigsten Verfahren vorgestellt.

In der modellbasierten Systementwicklung werden insbesondere in der Konzeptfindung und der Optimierungsphase parametrische Modelle verwendet. Häufig kommen dabei idealisierte Modellansätze, wie beispielsweise analytische Funktionen oder Mehrkörper-Simulationen zum Einsatz. Im domänenspezifischen Detailentwurf werden möglichst exakte Modelle der Komponenten und Teilsysteme erforderlich. Zur Modellbildung hat sich hierbei für mechanische Strukturen in der Schwingungstechnik die Finite-Elemente-Methode (FEM) etabliert. Üblicherweise wird die Ausgestaltung und Detaillierung einer Komponente durch rechnerunterstütztes Konstruieren (CAD) umgesetzt und durch Schnittstellen zu FE-Software können diese Geometrie-Modelle importiert werden. Integrierte MOR-Methoden ermöglichen die Analyse auf Systemebene und Optimierungsalgorithmen unterstützen die Auswahl geeigneter Designparameter. Dieses weit verbreitete Vorgehen ist in Abbildung 4.3a dargestellt.

Im Detailentwurf und in der Validierungsphase sind Änderungen von Designvariablen daher üblicherweise mit hohem zeitlichen Aufwand verbunden. Insbesondere wenn verschiedene numerische Software verwendet wird und Daten und Modelle ausgetauscht werden müssen. Die Motivation zur Entwicklung von parametrischen ordnungsreduzierten Modellen (PROM) beruht daher auf dem Bestreben und dem Erfordernis Entwurfsprozesse schneller und effizienter zu gestalten. In der vorliegenden Arbeit werden die Ansätze vorgestellt, auf deren Grundlagen die entwickelte Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme beruht. Mit der Weiterentwicklung der beschriebenen Ansätze wird das Ziel verfolgt eine Simulations- und Optimierungsumgebung, wie in Abbildung 4.3b dargestellt, zu ermöglichen.

Ein weiterer Anwendungsfall der PROM ist die Nutzungsphase technischer Systeme. Mithilfe dieser Modelle werden parallel und in Echtzeit ergänzende virtuelle Informationen von Prozessen und Produkten erzeugt. Im Kontext selbst-adaptierender oder selbst-optimierender Systeme sind effiziente und parametrische Modelle



(a) Beispielhafter Ablauf einer Optimierung mit gekoppelten Simulationswerkzeugen (b) Ablauf einer Optimierung mit parametrischen ordnungsreduzierten Modellen

Abbildung 4.3: Vergleich der Abläufe einer Optimierung mit und ohne parametrischen ordnungsreduzierten Modellen

unabdingbar. Werden diese Modelle direkt aus der Systementwicklung abgeleitet, kann sich ein enormer zeitlicher und wirtschaftlicher Vorteil ergeben. Im Kontext der Digitalisierung ergeben zudem weitere Anwendungsszenarien. So können die parametrischen strukturdynamischen Modelle im operativen Betrieb zur Zustandsüberwachung, als virtuelle Sensorik oder zur Zustandskontrolle eingesetzt werden.

Die Methoden der PMOR lassen sich in zwei Hauptkategorien unterteilen:

- Rationale Momentenanpassung
- Interpolationsbasierte Methoden

### Rationale Momentenanpassung

Die Methoden der rationalen Momentenanpassung stellen erweiterte parametererhaltenden Algorithmen auf Basis von Singulärwertzerlegungen oder Krylov-Unterraum-Verfahren dar. Sie wurden zunächst für Modelle entwickelt, bei denen sich der zu betrachtende Frequenzbereich bzw. der Entwicklungspunkt zeitlich verändert. Die Grundidee beruht auf der Erzeugung eines PROM, dass das Ausgangssystem an einem beliebigen Betriebspunkt mit sehr hoher Güte approximiert. Durch nachträgliche Variation des Entwicklungspunkts kann der tatsächliche Betriebspunkt eingestellt werden. Auf Basis einer Padé-Approximation wurde dieses Verfahren erstmals in [113] vorgestellt. Nachfolgend wurden die Methoden zur Momentenanpassung für lineare Systeme mit einem [54] sowie zwei Parametern [130] erweitert. Weiterhin existieren vergleichbare Methoden auf Basis von Singulärwertzerlegungen und balanciertem Abschneiden [105]. Allen Verfahren dieser Kategorie ist gemein, dass der Hauptaugenmerk auf der Variation des betrachteten Frequenzbereichs liegt. Variationen

der Designparameter lassen sich nur realisieren, wenn eine analytische Abhängigkeit existiert und diese auch im FOM formuliert werden kann.

#### Interpolationsbasierte Methoden

Für die Variation von Geometrie- oder Materialparametern, die die Systemmatrizen direkt beeinflussen, eignen sich interpolationsbasierte Methoden zur Generierung parametrischer ROM. Der Ablauf ist üblicherweise in drei Teilschritte gegliedert. Als erstes werden Parameterstützstellen gewählt, die den Parameterraum hinreichend abtasten. Anschließend werden lokale ROM für alle definierten Parameterstützstellen erzeugt. Die nicht-parametrischen lokalen Modelle können mit einem beliebigen MOR-Verfahren aus Abschnitt 4 generiert werden. Der prinzipielle Ablauf der Parametrierung eines PROM durch die Nutzung interpolationsbasierter Methoden ist in Abbildung 4.4 illustriert.

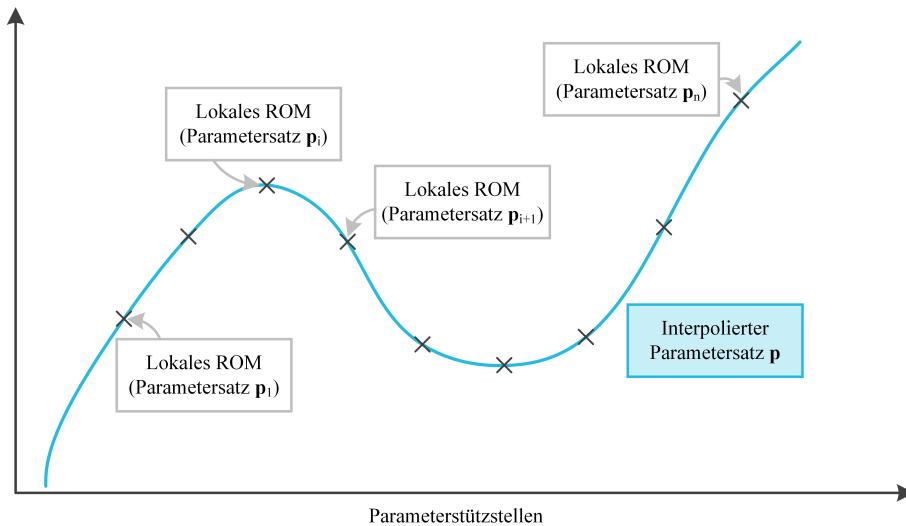


Abbildung 4.4: Ablauf der Parametrierung eines PROM durch die Nutzung interpolationsbasierter Methoden

Abschließend wird ein originäres parametrisches Modell aus den lokalen ROM abgeleitet [20]. Generell lassen sich die Methoden in lokale und globale Verfahren unterteilen. Bei den globalen Verfahren wird durch mathematische Algorithmen eine gemeinsame Basis bestimmt, die zur Projektion der Systemmatrizen genutzt wird. Lokale Methoden beruhen auf der direkten Interpolation bzw. geschickten Kombination der erzeugten nicht-parametrischen ROM und benötigen keinen speziellen Algorithmus.

**Globale Methoden** zur PMOR linearer Systeme basieren auf der Berechnung lokaler Projektionsmatrizen aus mehreren lokalen Modellen. Diese werden zu einer Matrix zusammengefügt und als globale Projektionsmatrix auf das ursprüngliche parametrische Modell angewendet [80, 82]. Die gemeinsame Basis wird durch Anwenden einer Singulärwert- oder QR-Zerlegung ermittelt. Ähnlich dem balancierten

Abschneiden (Abschnitt 4.2.5) werden die schlecht steuerbare oder beobachtbare Anteile eliminiert. Der Hauptvorteil dieser Methode ist die einfache und direkte Berechnung der Projektionsmatrix. Um parametrische Modelle mit geringer Ordnung zu erhalten werden allerdings affine Abbildungen der lokalen Projektionsmatrizen gefordert. Insbesondere bei der Integration vieler lokaler Modelle neigt das Verfahren dazu, sehr große und ineffiziente PROM zu generieren. Eine offene Forschungsaufgabe stellt dabei die Diskretisierung des Parameterraums und die Anzahl der notwendigen lokalen Modelle dar [51].

Grundsätzlich lässt sich keine Aussage darüber treffen, ob für ein betrachtetes dynamisches System eine globale Projektionsmatrix gefunden werden kann. Daher wurden in [100] zur Erstellung parametrischer ordnungsreduzierter Modelle **lokale Methoden** vorgeschlagen. Bei diesen Verfahren wird das FOM für  $n$  verschiedene Parameterwerte mit individuellen Projektionsmatrizen unabhängig reduziert. Das reduzierte parametrische Modell wird anschließend durch eine gewichtete Interpolation zwischen den Matrizen dieser  $n$  reduzierten lokalen Modelle ermittelt. Ein Vorteil gegenüber den vorherigen Verfahren ist, dass keine affinen oder analytischen parametrischen Abhängigkeiten erforderlich sind. Dies vereinfacht die Modellbildung in der Praxis enorm. Die Ordnung der PROM ist dabei nicht von der Anzahl der verwendeten lokalen ROM abhängig und somit vergleichbar mit denen der nicht-parametrischen Methoden. Um die Modellgüte zu steigern, können daher beliebig viele lokale ROM integriert werden.

Wie bei den globalen Methoden gibt es auch bei den lokalen Verfahren noch aktuelle Forschungsaufgaben bezüglich der Wahl der Gewichtungsfunktionen, der Möglichkeiten zur a priori Fehlerabschätzung oder der Stabilität des generierten PROM. Eine mögliche stabilitätserhaltende Methode wurde in [37] vorgestellt. Ein Verfahren zur Kopplung des balancierten Abschneidens mit Interpolation, sodass Fehlerabschätzungen für die Qualität des reduzierten Systems ableitbar sind, wird in [15] vorgeschlagen.

### Parametrische Methoden auf CMS-Basis

Wie beschrieben, kann für die lokale Ordnungsreduktion innerhalb der parametrischen MOR jede beliebige Methode aus Kapitel 4 angewandt werden. In der Strukturdynamik ist eine der am weitesten verbreitete Methode die Component Mode Synthesis (Abschnitt 4.2.3). Im Bereich der Substrukturierungstechniken wurde eine Approximation der Massen- und Steifigkeitsmatrizen durch eine Taylor-Reihenentwicklung vorgeschlagen [65]. Ein hybrides Verfahren wurde daraufhin von [101] entwickelt, bei dem Teile der Matrizen auf Basis globaler Verfahren approximiert werden. In [64] wurde die parametrische CMS zur Variation von FE-Volumenelementen erweitert, jedoch mit der Notwendigkeit von wenig praxistauglichen Koordinatentransformationen. Weitere Arbeiten beschäftigten sich außerdem mit der Anwendung auf statistische Methoden [69] und mit der Steigerung der Recheneffizienz [79].



### 4.3.2 Grundprinzipien

Analog zu dem linearen Deskriptorsystem zweiter Ordnung aus Gleichungen (3.2) und (3.3) wird das parametrische Deskriptorsystem durch

$$\mathbf{M}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{q}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{B}^{in}\mathbf{u}(t) \quad (4.43)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_1^{out}\mathbf{q}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}_2^{out}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) \quad (4.44)$$

beschrieben. Dabei stellt  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  den Parametersatz, bestehend aus den  $n_p$  Systemparametern

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) \quad (4.45)$$

dar. Wie im nicht-parametrischen Fall, ist das Ziel mittels PMOR ein System mit geringerer Modellordnung  $r \ll n$  gemäß Gleichungen (4.2) und (4.3) zu generieren.

Hierzu wird das parametrische System (4.43) zunächst an  $n_l$  verschiedenen diskreten Parameterstützstellen  $\mathbf{p}_i$  erzeugt. Dadurch ergeben sich  $n_l$  FOM der Ordnung  $n$ . Im zweiten Schritt werden diese Modelle jeweils separat voneinander auf eine definierte Modellordnung  $r$  reduziert. Es resultieren hieraus  $n_l$  nicht-parametrische lokale ROM der Ordnung  $r$ . Abschließend wird aus den lokalen ROM ein parametrisches ordnungsreduziertes Modell (PROM) der Form (4.2) und (4.3) abgeleitet. Durch geeignete Wahl einer interpolationsbasierten Methode kann ein PROM entwickelt werden, welches mit einem diskreten Parametersatz  $\mathbf{p}_j$  das zu  $j$  korrespondierende nicht-parametrische ROM approximiert. Dies gilt für den gesamten abgetasteten Parameterraum, auch wenn für dieses Parametersatz selbst kein lokales ROM des Ausgangsmodells erzeugt wurde ( $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}_i$ ).

Bei den vorgestellten Verfahren zur PMOR werden die Phasen der Modellbildung begrifflich in Offline- und Online-Phase unterteilt. Die Offline-Phase umfasst alle Arbeitsschritte zur Modellbildung des PROM, bei der die tatsächlichen Systemparameter noch unbekannt sind. Lediglich die Grenzen des Parameterraums müssen bereits definiert sein. Die Parametrierung mit einem diskreten Parametersatz findet dann in der Online-Phase statt. Die benötigte Zeit für diese Parametrierung ist entscheidend dafür, in welchen zeitlichen Schranken das PROM reagiert. Dies ist insbesondere für die Abschätzung der Echtzeitfähigkeit von Bedeutung. Grundsätzlich wird daher versucht, möglichst viele Rechenschritte in der Offline-Phase durchzuführen.

## 4.4 Zusammenfassung und Handlungsbedarf

Mit steigendem Rechenaufwand bei der Analyse von strukturdynamischen Systemen oder bei der Reglerauslegung werden häufig Methoden zur Modellordnungsreduktion eingesetzt. Insbesondere seit der flächendeckenden Nutzung der FE-Methode wurden verschiedene Methoden und Algorithmen entwickelt. Diese sind bezüglich ihrer

Approximationsgüte, Anwendbarkeit und numerischen Stabilität sehr ausgereift. Eine bestehende Herausforderung in dem Feld der MOR ist die Möglichkeit zur Anpassung von Designparametern im ordnungsreduzierten Modell, ohne dass dabei ein neues Modell aufgebaut werden muss.

In neueren Forschungsarbeiten werden daher Methoden vorgeschlagen, um parametrische Effekte direkt in das ROM zu integrieren. Für akademische Beispiele und einzelne Parameter wurden auch in diesem Forschungsfeld Methoden veröffentlicht. Insbesondere die globalen interpolationsbasierten Verfahren sind nur auf spezifische Anwendungsfälle anwendbar. Zudem sind die Algorithmen häufig numerisch nicht stabil.

Daher werden in der vorliegenden Arbeit mögliche Verfahren basierend auf der Kombination von etablierten MOR-Methoden und numerischen Verfahren untersucht und weiterentwickelt. Diese sollen durch eine einfache Anwendbarkeit und einen modularen Aufbau gekennzeichnet sein. Es soll die Möglichkeit zur Substrukturierung des Gesamtsystems gegeben sein, da dies für die Anwendung in der Strukturdynamik essentiell ist. Die Anforderungen an die Methodik und die Modelle sind detailliert in Abschnitt 5.1 dargestellt.

# Kapitel 5

## Methodik zur parametrischen Modellbildung

### 5.1 Anforderungen

In diesem Kapitel wird die Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen entwickelt und deren Ablauf detailliert beschrieben. Zunächst werden die Anforderungen an die Methodik und die erzeugten ordnungsreduzierten Modelle (vgl. Abschnitt 1.2) sowie die geforderten Bedingungen an die Ausgangsmodelle zusammengefasst.

- Der Prozess der Modellordnungsreduktion soll möglichst automatisiert ablaufen und auf numerischen Standardverfahren aufbauen. In der vorliegenden Arbeit werden die Softwarepakete ANSYS für die Berechnungen mittels der Finite-Elemente-Methode und Matlab/Simulink für die Systemsimulation verwendet. Für den Export der Systemmatrizen aus dem FE-Tool und den Import in die Systemsimulationsumgebung wird das AdaptoSim-ANSYS-Matlab-Interface genutzt.
- Die Methode soll auf strukturmechanische Modelle in Form einer Differentialgleichung zweiter Ordnung anwendbar sein. Dabei soll die Beschreibung des Modells anhand eines Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung erhalten bleiben.
- Die PROM sollen in ihren Eigenschaften so beschaffen sein, dass eine gekoppelte Systemsimulation mit strukturmechanischen oder regelungstechnischen Modellen in einer integrierten Simulationsumgebung möglich ist. Die in Abschnitt 2.2 vorgestellte modulare und hierarchische Modellstruktur sowie die Konventionen für Ein- und Ausgänge sollen berücksichtigt werden. Somit soll eine leichte Integration in den modellbasierten Entwicklungsprozess ermöglicht werden.
- Die Offline-Phase der Modellbildung soll im Rahmen üblicher Berechnungszeiten liegen und sich durch hohe Praxistauglichkeit auszeichnen.

- In der Validierungsphase der Entwicklung sowie der Nutzungsphase eines Produkts sollen mithilfe der PROM smarte Eigenschaften, wie beispielsweise eine Adaption auf veränderliche äußere Bedingungen oder eine Selbstoptimierung ermöglicht werden. Dies soll in der vorliegenden Arbeit durch Integration der PROM in eine Gesamtsystemsimulation und Parametrierung der Modelle zur Simulationslaufzeit abgeschätzt werden.
- Die betrachteten Designvariablen der PROM sollen sich auf strukturelle Parameter beschränken. Der für eine Anwendung interessante Frequenzbereich wird im Vorhinein festgelegt und stellt keinen eigenständigen Parameter dar.
- Die Bewertung der Modellgüte des PROM soll anhand zwei unabhängiger Kriterien erfolgen. Zum einen soll die Genauigkeit und zum anderen die Erfüllung der Zeitbedingungen bewertet werden.
- Die Ausgangsmodelle sollen strukturelle FE-Modelle sein. Ferner sollen aktuelle Schalen- oder Volumenelemente und isotrope Materialmodelle genutzt werden.
- Das FOM kann in beliebig viele Substrukturen unterteilt werden. Eine Substruktur wird durch einen zeitvarianten Parametersatz beschrieben, wobei die einzelnen Parameter zu einem bestimmten Zeitpunkt über die gesamte Substruktur konstant sind.

## **5.2 Methodik und Ablauf**

In den folgenden Abschnitten wird das entwickelte Verfahren zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme im Detail vorgestellt. Dabei handelt es sich um eine zweistufige hybride Modellordnungsreduktion auf Basis der CMS-Methode und einer Interpolation lokal reduzierter Modelle. Startpunkt der Methode ist die parametrische Component Mode Synthesis (5.2.1). Daran anschließend werden die Interpolation lokaler ordnungsreduzierter Modelle (5.2.2) und die Synthese der Substrukturen (5.2.3) erläutert. Die Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade (5.2.4) stellt die zweite Stufe dar und mit der finalen Parametrierung (5.2.5) endet die Beschreibung des entwickelten Verfahrens.

### **5.2.1 Parametrische Component Mode Synthesis**

In diesem Abschnitt wird die Parametrische Component Mode Synthesis für Deskriptorsysteme zweiter Ordnung (3.2) vorgestellt. Das resultierende parametrische Modell soll dabei die strukturdynamischen Parameter aller Substrukturen des Systems beibehalten. Die Substrukturierung und spätere Synthese der Teilmodelle orientiert sich dabei an [74].

Die Modellparameter des Gesamtsystems seien in einem Vektor

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) \quad (5.1)$$

mit  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  zusammengefasst und die parametrische Bewegungsgleichung der Form (4.43) und (4.44) sei gegeben durch

$$\mathbf{M}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{q}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{B}^{in}\mathbf{u}(t) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_1^{out}\mathbf{q}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}_2^{out}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, t). \quad (5.3)$$

Die Gleichungen (5.2) und (5.3) beschreiben das unreduzierte Gesamtsystem der Ordnung  $n$ , welches in  $n_{sub}$  Substrukturen unterteilt wird. Für eine individuelle Substruktur lautet die ungedämpfte Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s)\ddot{\mathbf{q}}^s(\mathbf{p}^s, t) + \mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s)\dot{\mathbf{q}}^s(\mathbf{p}^s, t) = \mathbf{B}^{in}\mathbf{u}^s(t). \quad (5.4)$$

Der hochgestellte Index  $(.)^s$  beschreibt dabei die Kennziffer der Substruktur mit  $s = 1, \dots, n_{sub}$ . Der Dämpfungsterm  $\mathbf{B}^s(\mathbf{p}^s)$  wurde in Gleichung (5.4) aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Die mechanische Dämpfung wird in dieser Arbeit durchgängig als Rayleigh-Dämpfung [30] formuliert und wird daher erst im finalen PROM integriert. Die Parametersätze der einzelnen Substrukturen  $\mathbf{p}^s$  sind bezüglich Dimension, Anordnung und physikalischer Bedeutung der Parameter identisch mit  $\mathbf{p}$ , obgleich die Designvariablen der Substrukturen in der Praxis üblicherweise untereinander variieren. Grundsätzlich wird dies durch die vorgeschlagene Methode ermöglicht, in der vorliegenden Arbeit werden die nicht benötigten Parameter ebenfalls erst in der Simulations- oder Optimierungsphase durch einen konstanten Wert im PROM festgelegt.

Die Bewegungsgleichungen der Substrukturen werden gemäß Gleichung (4.20) in innere  $(.)_i$  und Master-Freiheitsgrade  $(.)_m$  unterteilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii}^s(\mathbf{p}^s) & \mathbf{M}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \\ \mathbf{M}_{mi}^s(\mathbf{p}^s) & \mathbf{M}_{mm}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i^s \\ \ddot{\mathbf{q}}_m^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii}^s(\mathbf{p}^s) & \mathbf{C}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \\ \mathbf{C}_{mi}^s(\mathbf{p}^s) & \mathbf{C}_{mm}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i^s \\ \dot{\mathbf{q}}_m^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^s \\ \mathbf{F}_m^s \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Als Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_m^s$  werden alle äußeren Freiheitsgrade, die im PROM als Ein- und Ausgänge des Gesamtsystems erhalten bleiben sollen sowie alle Freiheitsgrade, die in einer Koppelstelle zu benachbarten Substrukturen liegen, definiert. Der modale Anteil der Projektionsmatrix wird anschließend unter Verwendung der „Fixed-Interface“-Variante der CMS nach Craig und Bampton [34] für festgehaltene Master-Freiheitsgrade ( $\mathbf{q}_m = \mathbf{0}$ ) berechnet. Aus Gleichung (5.5) folgt für die inneren Freiheitsgrade

$$\mathbf{M}_{ii}^s(\mathbf{p}^s)\ddot{\mathbf{q}}_i^s + \mathbf{C}_{ii}^s(\mathbf{p}^s)\dot{\mathbf{q}}_i^s = \mathbf{F}_i^s. \quad (5.6)$$

Die Transformationsmatrix zur Projektion der Systemmatrizen aus Gleichung (5.5) in den modalen Raum wird durch Lösen des generalisierten Eigenwertproblems (Gl. (4.15))

$$\mathbf{C}_{ii}^s(\mathbf{p}^s)\Phi_{i,k}^s = \lambda_{i,k}^s \mathbf{M}_{ii}^s(\mathbf{p}^s)\Phi_{i,k}^s \quad (5.7)$$

mit  $k = 1, 2, \dots, n_i^s$  erzeugt. Durch Auswahl von  $n_r^s \ll n_i^s$  Eigenmoden werden die inneren Freiheitsgrade jeder Substruktur mit

$$\bar{\Phi}_i^s(\mathbf{p}^s) = [\Phi_{i,1}^s(\mathbf{p}^s) \Phi_{i,2}^s(\mathbf{p}^s) \dots \Phi_{i,n_r^s}^s(\mathbf{p}^s)]. \quad (5.8)$$

und der korrespondierenden Abbildungsvorschrift

$$(\mathbf{q}_i^s)_{dyn} = \bar{\Phi}_i^s(\mathbf{p}^s)\bar{\mathbf{w}}_i^s \quad (5.9)$$

in reduzierte modale Koordinaten transformiert.

Zur Berechnung des statischen Anteils der der Projektionsmatrix werden die sogenannten Zwangsdeformationen in den Koppelstellen der Substrukturen benötigt. Diese werden durch Aufprägen einer Einheitsverschiebung auf jeden einzelnen Master-Freiheitsgrad in (5.5) bestimmt und spaltenweise in einer Matrix zusammengefasst. Die statische Gleichgewichtsgleichung (4.9) wird aus Gleichung (5.5) durch Streichen der Massenmatrix ermittelt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii}^s(\mathbf{p}^s) & \mathbf{C}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \\ \mathbf{C}_{mi}^s(\mathbf{p}^s) & \mathbf{C}_{mm}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{im}^s \\ \mathbf{I}_{mm}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^s \\ \mathbf{F}_m^s \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Ohne äußere Lasten auf den inneren Freiheitsgraden ( $\mathbf{F}_i^s = 0$ ) ergeben sich aus Gleichung (5.10) die Zwangsbedingungen

$$\Psi_{im}^s = -\mathbf{C}_{ii}^s(\mathbf{p}^s)^{-1}\mathbf{C}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \quad (5.11)$$

mit der Anzahl der Koppelfreiheitsgrade  $n_k^s$  und der Projektionsmatrix  $\Psi_{im}^s \in \mathbb{R}^{n_i^s \times n_k^s}$ . Durch diese Projektion werden die inneren Koordinaten in Abhängigkeit der Master-Freiheitsgrade beschrieben. In Gleichung (5.12) ist dieser Zusammenhang dargestellt.

$$(\mathbf{q}_i^s)_{stat} = \Psi_{im}^s(\mathbf{p}^s)\mathbf{q}_m^s \quad (5.12)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade des resultierenden ROM einer Substruktur ergibt sich folglich zu  $n_{cms}^s = n_r^s + n_k^s$  und aus den Gleichungen (5.9) und (5.12) wird die resultierende Gesamtverschiebung

$$\mathbf{q}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^s \\ \mathbf{q}_m^s \end{bmatrix} \cong \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_i^s \\ \mathbf{q}_m^s \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

mit

$$\mathbf{q}_i^s = (\mathbf{q}_i^s)_{dyn} + (\mathbf{q}_i^s)_{stat} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i^s & \Psi_{im}^s \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

abgeleitet.

Die ordnungsreduzierten Matrizen der Systemgleichung (5.4) einer Substruktur  $s$  werden abschließend durch Projektion mit  $\mathbf{T}_{cms}^s$  berechnet.

$$\bar{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) = \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s)^T \mathbf{M}^s(\mathbf{p}^s) \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s) \quad (5.15)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) = \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s)^T \mathbf{C}^s(\mathbf{p}^s) \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s) \quad (5.16)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{in}^s(\mathbf{p}^s) = \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s)^T \mathbf{B}_{in}^s(\mathbf{p}^s) \quad (5.17)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{out}^s(\mathbf{p}^s) = \mathbf{B}_{out}^s(\mathbf{p}^s) \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}^s) \quad (5.18)$$

Aus den Gleichungen (5.14) und (5.15) ist die ordnungsreduzierte Massenmatrix für die Komponente  $s$  gegeben durch

$$\bar{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ii}^s(\mathbf{p}^s) & \bar{\mathbf{M}}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \\ \bar{\mathbf{M}}_{mi}^s(\mathbf{p}^s) & \bar{\mathbf{M}}_{mm}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Der Index  $(\cdot)_i$  kennzeichnet in konsistenter Weise den modalen Anteil der inneren Freiheitsgrade und  $(\cdot)_m$  den Anteil der Zwangsdeformation der Master-Freiheitsgrade. Die vier Blockmatrizen können einzeln wie folgt berechnet werden, wobei die Parameterabhängigkeit der Teilmatrizen aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen wurden:

$$\bar{\mathbf{M}}_{ii}^s = (\bar{\Phi}_i^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s \bar{\Phi}_i^s \quad (5.20)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{im}^s = (\bar{\Phi}_i^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s \Psi_{im}^s + (\bar{\Phi}_i^s)^T \mathbf{M}_{im}^s \quad (5.21)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mi}^s = ((\Psi_{im}^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s + \mathbf{M}_{mi}^s) \bar{\Phi}_i^s \quad (5.22)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mm}^s = ((\Psi_{im}^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s + \mathbf{M}_{mi}^s) \bar{\Psi}_{im}^s + (\Psi_{im}^s)^T \mathbf{M}_{im}^s + \mathbf{M}_{mm}^s \quad (5.23)$$

Der Aufbau der Steifigkeits-, Eingangs- und Ausgangsmatrix erfolgt analog zu den Gleichungen (5.20) bis (5.23) und ist in Anhang A.1 vollständig dargestellt. Am Ende dieses Arbeitsschritts liegen nun  $n_{sub}$  parametrische ROM der Ordnung  $n_{cms}^s$  vor.

### 5.2.2 Interpolation lokaler ordnungsreduzierter Modelle

Für Systemparameter, die keinen linearen Einfluss auf die Massen- und Steifigkeitsmatrix haben, ist es sinnvoll zwischen lokalen ROM zu interpolieren (vgl. Abschnitt 4.3.1). Dabei sieht das entwickelte Verfahren vor, das Ausgangsmodell unabhängig an einigen Stützstellen bzw. Betriebspunkten des Parameterraums zu reduzieren. Mit diesen unabhängig voneinander reduzierten Modellen lässt sich anschließend durch eine gewichtete Interpolation ein beliebiges ROM im Parameterraum darstellen. Die

Berechnung der lokalen ROM findet ausschließlich in der Optimierungsphase und dem Detailentwurf der modellbasierten Systementwicklung statt. Dadurch können die Modelle in der Nutzungsphase durch Matrixaddition und Matrixmultiplikation bestimmt werden, was die benötigte Rechenleistung und -zeit erheblich senkt. Die Anzahl der notwendigen lokalen ROM sowie die damit im Zusammenhang stehende Approximationsgüte hängt dabei von der Größe des gewählten Parameterraums ab.

Das Parameterset  $\mathbf{P}^s$  einer Substruktur  $s$  ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{P}^s = [\mathbf{p}_1^s, \mathbf{p}_2^s, \dots, \mathbf{p}_{n_l}^s] \quad (5.24)$$

Da die Interpolation auf Substruktur-Ebene ausgeführt wird, kann die Anzahl der Stützstellen  $n_l$  der einzelnen Substrukturen variieren. Werden für eine Substruktur nur Materialparameter mit linearem Einfluss auf die Systemmatrizen variiert, ist dieser Schritt obsolet und es wird nur ein lokales ROM berechnet (siehe Abschnitt 5.2.5).

Die von Newton begründete lineare Interpolation stellt eine einfache und häufig genutzte Approximation zwischen zwei Punkten dar. In Kombination mit balanciertem bzw. modalem Abschneiden, Proper Orthogonal Decomposition oder Krylov-Unterraum-Verfahren wird diese Methode in [84] zur Modellbildung und Lösung nichtlinearer Systeme vorgeschlagen. Zunächst werden die ordnungsreduzierten Systemmatrizen an den Stützstellen berechnet. Gemäß Abschnitt 5.2.1 sind für die CMS sowohl die Zwangsdeformationen an den Koppelstellen als auch die Eigenmoden bei fixierten Master-Freiheitsgraden für alle Substrukturen zu ermitteln. Aus Gleichungen (5.15) und (5.16) ergeben sich für  $k = 1, 2, \dots, n_l$  folgende Berechnungsvorschriften:

$$\bar{\mathbf{M}}_k^s = \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}_k^s)^T \mathbf{M}^s(\mathbf{p}_k^s) \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}_k^s) \quad (5.25)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_k^s = \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}_k^s)^T \mathbf{C}^s(\mathbf{p}_k^s) \mathbf{T}_{cms}^s(\mathbf{p}_k^s). \quad (5.26)$$

Das aktuelle ROM der Substruktur  $s$  wird abschließend durch die gewichtete Interpolationsfunktion

$$\bar{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) = \sum_{k=1}^{n_l^s} \rho_k^s(\mathbf{p}^s) \bar{\mathbf{M}}_k^s \quad (5.27)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) = \sum_{k=1}^{n_l^s} \rho_k^s(\mathbf{p}^s) \bar{\mathbf{C}}_k^s \quad (5.28)$$

erzeugt. Dabei wird die Randbedingung

$$\sum_{k=1}^{n_l^s} \rho_k^s(\mathbf{p}^s) = 1 \quad (5.29)$$

gefordert. Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Gewichtungsfunktion  $\rho_k^s$  ist in Abbildung 5.1 dargestellt.



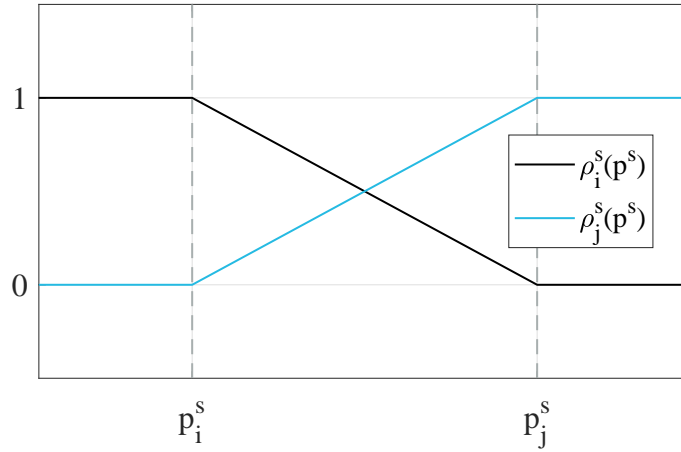


Abbildung 5.1: Gewichtungsfunktion zwischen zwei Parametersets

Das vorgestellte Vorgehen zur Interpolation lokaler ordnungsreduzierter Modelle ermöglicht ebenso Spline- oder Polynom-Interpolation höherer Ordnung, die im Folgenden aber nicht weiter betrachtet werden.

### 5.2.3 Synthese der Substrukturen

Um das dynamische Verhalten auf Systemebene vorherzusagen, werden die erhaltenen Massen- und Steifigkeitsmatrizen aus den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 für jede Substruktur zusammengesetzt. Dazu müssen die geometrische Kompatibilitätsbedingungen eingehalten werden.

Die ungedämpfte Bewegungsgleichung (3.2) auf Substruktur-Ebene wird mit den Gleichungen (5.15) bis (5.17) durch

$$\bar{\mathbf{M}}^s \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{w}}}_i^s \\ \ddot{\mathbf{q}}_m^s \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{C}}^s \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{w}}}_i^s \\ \mathbf{q}_m^s \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_{in}^s \mathbf{u} \quad (5.30)$$

beschrieben. Bei der Synthese der Substrukturen gibt es keinen Unterschied zwischen der parametrischen und nicht-parametrischen Formulierung, weshalb in diesem Abschnitt die Kennzeichnung der Parameterabhängigkeit ebenfalls zu Gunsten der Lesbarkeit weggelassen wird.

Zunächst werden die Systemmatrizen aller Substrukturen  $n_s$  als Blockdiagonalmatrizen

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}^{(1)} & & & \\ & \bar{\mathbf{M}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{M}}^{n_s} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^{(1)} & & & \\ & \bar{\mathbf{C}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{C}}^{n_s} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

und als spaltenweise bzw. zeilenweise Blockmatrizen

$$\bar{\mathbf{B}}_{in} = [\bar{\mathbf{B}}_{in}^{(1)} \ \bar{\mathbf{B}}_{in}^{(2)} \ \dots \ \bar{\mathbf{B}}_{in}^{n_s}]^T, \quad \bar{\mathbf{B}}_{out} = [\bar{\mathbf{B}}_{out}^{(1)} \ \bar{\mathbf{B}}_{out}^{(2)} \ \dots \ \bar{\mathbf{B}}_{out}^{n_s}] \quad (5.32)$$

zusammengesetzt.

Durch die Integration der geometrischen Kompatibilitätsbedingungen werden die Matrizen des ROM, vergleichbar wie bei der Modellierung in gängiger FEM-Software, transformiert. Für zwei aneinander angrenzende Substrukturen (1) und (2) gilt für die physikalischen Koordinaten an der gemeinsamen Schnittstelle

$$\mathbf{q}_m^{(1)} = \mathbf{q}_m^{(2)}. \quad (5.33)$$

Hieraus ergeben sich die synthetisierten Systemmatrizen

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{\psi\psi} & \bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi} \\ \bar{\mathbf{M}}_{\phi\psi} & \bar{\mathbf{M}}_{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{\psi\psi} & \bar{\mathbf{C}}_{\psi\phi} \\ \bar{\mathbf{C}}_{\phi\psi} & \bar{\mathbf{C}}_{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{in} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{in,\psi} \\ \bar{\mathbf{B}}_{in,\phi} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{out} = [\bar{\mathbf{B}}_{out,\psi} \ \bar{\mathbf{B}}_{out,\phi}] \quad (5.35)$$

mit einer Matrix  $\bar{\mathbf{M}}_{\psi\psi}$ , die aus den entsprechenden Einträgen der korrespondierenden physikalischen Master-Freiheitsgrade erzeugt wird. Diese setzen sich aus den äußeren Freiheitsgraden, die für die Analyse des Systems benötigt werden und den Koppel-Freiheitsgraden in den Schnittstellen der Substrukturen zusammen. Letztere kommen in mindestens zwei Substrukturen des Gesamtsystems vor, weshalb die Dimension der Matrizen aus Gleichung (5.31) durch die Bedingung aus Gleichung (5.33) verringert wird. Gleiches gilt für die Zeilen in

$$\bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi} = [\bar{\mathbf{M}}_{mi}^{(1)} \ \bar{\mathbf{M}}_{mi}^{(2)} \ \dots \ \bar{\mathbf{M}}_{mi}^{n_s}]. \quad (5.36)$$

Die weiteren Teilmatrizen der gekoppelten Massenmatrix sind wie folgt definiert:

$$\bar{\mathbf{M}}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{n_s} \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{\phi\psi} = (\bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi})^T. \quad (5.38)$$

Der Aufbau der Steifigkeits-, Eingangs- und Ausgangsmatrix erfolgt analog zu den Gleichungen (5.36) bis (5.38) und ist in Anhang A.2 vollständig dargestellt.

### 5.2.4 Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade

In den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.3 sind die Methoden zur Reduktion der inneren Freiheitsgrade der einzelnen Substrukturen und die anschließende Synthese der erzeugten ROM beschrieben. Die Dimension der ordnungsreduzierten modalen Koordinaten  $\bar{\mathbf{w}}_i$  und somit die Leistungsfähigkeit der MOR hängt dabei von der Wahl der Anzahl  $r_i^s$  der zu berücksichtigenden Eigenmoden ab (Gl. 5.7). Die physikalischen Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_m$  dagegen sind in FOM und ROM identisch. Die Dimensionen der entsprechenden Teilmatrizen des Systems sind daher von den Freiheitsgraden in den Koppelstellen zwischen den Substrukturen und folgerichtig von dem FE-Netz des FOM abhängig. Insbesondere bei vielen Substrukturen und damit einhergehend vielen Koppelstellen oder bei einer großen Anzahl von Knoten in den Koppelstellen führt dies zu großen Teilmatrizen  $(\cdot)_{\psi\psi}$  in Gleichung (5.34). Weiterhin verringert sich die physikalische Bedeutung der einzelnen Zwangsdeformation, die durch Aufprägen einer separaten Einheitsverschiebung auf dem entsprechenden Master-Freiheitsgrad berechnet wird, je mehr Knoten in einer Koppelstelle existieren.

In der Schwingungstechnik reichen unabhängig von der Komplexität der Substrukturen häufig 10 bis 20 Eigenmoden aus, um das dynamische Verhalten im gewünschten Frequenzbereich adäquat zu approximieren. In den Koppelstellen können dagegen leicht mehrere tausend Freiheitsgrade vorkommen. In diesem Fall wird die Ordnung des ROM deutlich von der Anzahl der Koppel-Freiheitsgrade dominiert.

In der nachgelagerten zweiten Stufe des vorgeschlagenen Verfahren werden aus diesem Grund die Koppel-Freiheitsgrade reduziert. Es werden Koordinaten gesucht, die die Zwangsdeformationen an den Koppelstellen der Substrukturen abbilden. Hier eignen sich das vorgestellte modale (Abschnitt 4.2.2) und balancierte Abschneiden (Abschnitt 4.2.5) sowie alle weiteren projektiven MOR-Methoden. Die Projektionsvorschrift lautet gemäß Gleichung (4.3)

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{T}\mathbf{w}_m \quad (5.39)$$

mit den physikalischen Koordinaten  $\mathbf{q}_m$ , den ordnungsreduzierten Koordinaten  $\mathbf{w}_m$  und der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ . Der Ablauf der Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade wird im Folgenden beispielhaft anhand des Modalen Abschneidens gezeigt. In diesem Fall wird die Projektionsmatrix durch Lösen des Eigenwertproblems

$$\bar{\mathbf{C}}_{\psi\psi}(\mathbf{p})\Phi_{\psi} = \lambda_{\psi}\bar{\mathbf{M}}_{\psi\psi}(\mathbf{p})\Phi_{\psi} \quad (5.40)$$

erzeugt. Die Matrix  $\Phi_{\psi}$  stellt dabei eine Eigenwert-basierte lineare Kombination von Zwangsdeformationen aufgrund von Einheitsverschiebungen in den Koppelstellen der CMS-Substrukturen dar. Wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, wird aus dem vollständigen Set dieser Eigenvektoren  $\Phi_{\psi} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$  des parametrischen Systems (Gleichung 5.30) eine Auswahl  $\bar{\Phi}_{\psi} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_m}$  mit  $n_r \ll n_m$  getroffen. Hieraus werden

die Projektionsvorschriften

$$\hat{\mathbf{M}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{\Phi}}_{\psi}^T \bar{\mathbf{M}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{\Phi}}_{\psi} \quad (5.41)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{\Phi}}_{\psi}^T \bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) \quad (5.42)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{M}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{\Phi}}_{\psi} \quad (5.43)$$

zur Ordnungsreduktion der Teilmatrizen der gekoppelten Massenmatrix aus Gleichung (5.34) abgeleitet. Wie in den vorangegangenen Abschnitten werden die Steifigkeits-, Eingangs- und Ausgangsmatrix analog aufgebaut und hier auf die vollständige Darstellung der Projektionsvorschriften verzichtet. Alle weiteren Formeln sind in Anhang A.3 zusammengefasst.

Das finale parametrische Systemmodell der Ordnung  $r = n_r + \sum_{s=1}^{n_{sub}} n_{cms}^s$  ergibt sich schließlich zu

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{\phi\phi}(\mathbf{p}) & \hat{\mathbf{M}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \\ \hat{\mathbf{M}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) & \hat{\mathbf{M}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{w}}}_i \\ \ddot{\bar{\mathbf{w}}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{\phi\phi}(\mathbf{p}) & \hat{\mathbf{B}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \\ \hat{\mathbf{B}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) & \hat{\mathbf{B}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{w}}}_i \\ \dot{\bar{\mathbf{w}}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{\phi\phi}(\mathbf{p}) & \hat{\mathbf{C}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \\ \hat{\mathbf{C}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) & \hat{\mathbf{C}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_i \\ \bar{\mathbf{w}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{p})\ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{p})\dot{\bar{\mathbf{w}}} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{p})\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Der Ablauf der Methode zur Bildung parametrischer ordnungsreduzierter Modelle ist grafisch in Abbildung 5.2 dargestellt. In 5.2a ist die mechanische Struktur, in diesem Beispiel eine rechteckige Platte, als FE-Modell abgebildet.

Zunächst wird das Gesamtsystem in Substrukturen unterteilt (5.2b) und die notwendigen Parameter zur Analyse und späteren Anwendung definiert. Analytische Abhängigkeiten werden dabei direkt in dem Aufbau der Teilmatrizen berücksichtigt. Für alle weiteren Parameter werden lokale ROM gebildet und interpoliert (5.2c). Abschließend werden die Substrukturen zusammengesetzt, die Freiheitsgrade in den Koppelstellen reduziert und das erzeugte PROM final parametrisiert (5.2d).

### 5.2.5 Parametrierung

Die Parametrierung des Systemmodells aus Gleichung (5.44) erfolgt in Matlab/Simulink. Der notwendige globale Parametersatz  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p \times n_{sub}}$  besteht dabei aus allen Parametern der jeweiligen Substrukturen. Für Analysen im Frequenzbereich oder zum Lösen von Optimierungsproblemen wird die Matlab-Umgebung verwendet. Die aktuellen diskreten Parameter werden dabei vor dem abschließenden Zusammensetzen der Gesamtsystemmatrizen (5.44) skalar mit den Teilmatrizen der Substrukturen multipliziert. Die Teilmatrizen sind dabei bereits auf die Ordnung  $r$  des Gesamtsystems erweitert und entsprechend der Anordnung der korrespondierenden Freiheitsgrade im

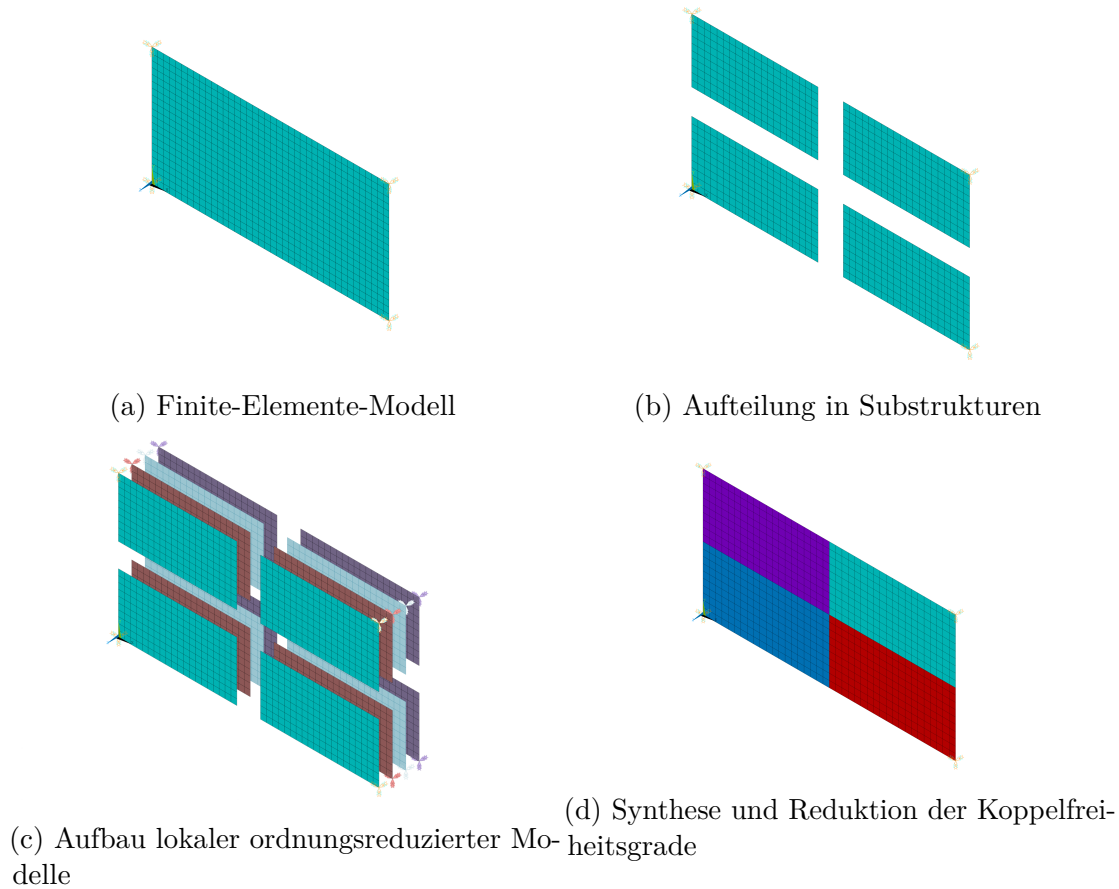


Abbildung 5.2: Grafische Darstellung der parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme

Zustandsvektor platziert worden. Die Kopplung der Teilmodelle erfolgt anschließend durch Addition der Matrizen aller Substrukturen. Die mathematischen Operationen zur Parametrierung beschränken sich somit auf Skalarmultiplikationen und Additionen, was eine schnelle und effiziente Berechnung zulässt.

Für Simulationen im Zeitbereich wird in dieser Arbeit die Simulink-Umgebung genutzt. Diese ermöglicht die hierarchische Modellierung mit Hilfe grafischer Blöcke. Der Block zur Beschreibung linearer Systeme in Zustandsraumdarstellung wurde auf parametrische Modelle erweitert. Dazu wurden weitere Systemeingänge definiert und in den oben beschriebenen Berechnungsablauf durch eine eingebettete Matlab-Funktion integriert (Abbildung 5.3). Das lineare System ist in Admittanz-Darstellung formuliert und benötigt somit äußere Kräfte als Eingangsgrößen und gibt Geschwindigkeiten als Ausgangsgrößen aus. Neben dem Krafteingang sind im erweiterten parametrischen Zustandsraummodell zusätzliche Eingangsgrößen definierbar. Die sogenannten Designparameter werden in gleicher Weise an das System übergeben und beeinflussen dabei die Systemmatrix  $\mathbf{A}(\mathbf{p})$  und bewirken somit eine Änderung des dynamischen Verhaltens.

Sind an die Simulation harte Echtzeitanforderungen geknüpft, muss zu jedem

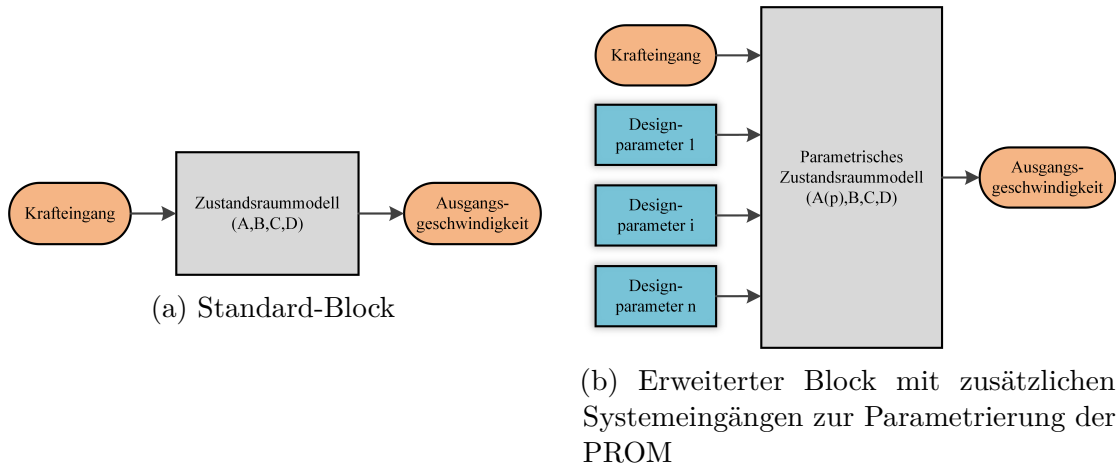


Abbildung 5.3: Simulink-Block eines regulären und parametrischen linearen Systems in Zustandsraumdarstellung

Zeitschritt der Zeitbereichssimulation ein aktualisiertes Gesamtsystem aufgebaut werden. Dies geschieht auch, wenn sich der Parametersatz im Vergleich zum vorherigen Zeitschritt nicht verändert hat. Je nach Komplexität des Modells und betrachteten Frequenzbereich ist dies in der Praxis allerdings häufig nicht möglich. In diesem Fall wird die Zeitbereichssimulation kurzzeitig unterbrochen, das Gesamtsystem aufgebaut und die Simulation wieder aufgenommen. Dies kann für Systeme mit hoher Dynamik und bei der gleichzeitigen Verarbeitung von realen und virtuellen Daten zu Problemen führen. Aus diesem Grund wird die Reaktionszeit in der Anwendung der parametrischen Modelle als Gütekriterium der PROM definiert.

### 5.3 Parametereinfluss und numerische Umsetzung

Für numerische Simulationen ist eine geeignete mathematische Modellierung der zu untersuchenden Vorgänge elementar. Im Allgemeinen geht es in der Strukturmechanik um die Bestimmung von Bewegungsgrößen, welche durch die Einwirkung von äußeren Kräften unterschiedlicher Art hervorgerufen werden. Daraus lassen sich Deformationen oder Spannungen im Körper ermitteln, die für viele Anwendungen von besonderer Bedeutung sind. Es werden unterschiedliche Materialgesetze genutzt, die zusammen mit den grundlegenden kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen, zu komplexen Gleichungssystemen führen.

Die wichtigsten Gleichungen der linearen Elastostatik stellen den Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen, die Gleichgewichtsbedingungen und die konstitutiven Gleichungen (Materialgesetze) dar [128]. Mit dem Vektor der Verzerrungen  $\underline{\epsilon}$ , der Differentiationsmatrix  $\mathbf{D}$  und dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  lautet der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

$$\underline{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (5.46)$$

### 5.3 Parametereinfluss und numerische Umsetzung

Die Gleichgewichtsbedingungen werden durch

$$\mathbf{D}^T \underline{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5.47)$$

mit dem Vektor der Volumenlasten  $\mathbf{f}$  und dem Spannungsvektor  $\underline{\sigma}$  beschrieben. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst nur solche Materialien betrachtet, die durch das Hookesche Gesetz

$$\underline{\sigma} = \mathbf{E} \underline{\epsilon} \quad (5.48)$$

dargestellt werden können. Die Hookesche Matrix  $\mathbf{E}$  wird im isotropen Fall durch die zwei unabhängige Stoffgrößen, den Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  beschrieben. Mit entsprechenden Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen ergibt sich aus den Gleichungen (5.46) bis (5.48) eine Randwertaufgabe, die mit der Methode der finiten Elemente (FEM) gelöst werden kann. Die FEM basiert üblicherweise auf einer Variationsformulierung dieser Randwertaufgabe, wobei die in dieser Arbeit genutzte FE-Software ANSYS das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (bzw. das Prinzip vom Minimum des Elastischen Gesamtpotentials) nutzt [6].

Für einen Spannungszustand, der die statischen Gleichgewichts- und Randbedingungen erfüllt, ist die bei einer virtuellen Verschiebung geleistete Arbeit der inneren Kräfte  $\delta W_i$  gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta W_a$ . Durch Diskretisierung mit FE und die Wahl der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_a$  kann der Verschiebungszustand in einem Bauteil oder in einem beliebigen Körper durch elementweise definierte Näherungsfunktionen approximiert werden. Die Ansatzfunktionen sind nur in jeweils einem Element definiert, außerhalb des Elementes sind sie Null.

Aus den beschriebenen Grundgleichungen der FEM und mit der Matrix der Ableitungen der Ansatzfunktionen  $\mathbf{B}_a$  können nun die Elementsteifigkeitsmatrix

$$k_e = \int_V \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a dV \quad (5.49)$$

und die Elementmassenmatrix

$$m_e = \int_V \rho \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_a dV \quad (5.50)$$

für ein beliebiges finites Element hergeleitet werden [135, 14]. Anhand eines einfachen Beispiels (Abbildung 5.4) sowie der Analyse der Elementmatrizen wird in den Abschnitten 5.3.1 bis 5.3.4 der Parametereinfluss und das Vorgehen zur numerischen Umsetzung im Detail erläutert.

Betrachtet wird nachfolgend der Einfluss einer Parameteränderung in Substruktur (2) auf das Gesamtsystem. Die drei weiteren Substrukturen bleiben dabei unverändert. Verglichen werden jeweils drei Frequenzgänge bei Variation eines Parameters sowie die MAC-Matrix der ersten fünf Eigenformen. Die Frequenzgänge (Kraft zu Verschiebung) werden dabei an Knoten  $P_1$  berechnet (siehe Abbildung 5.4a).

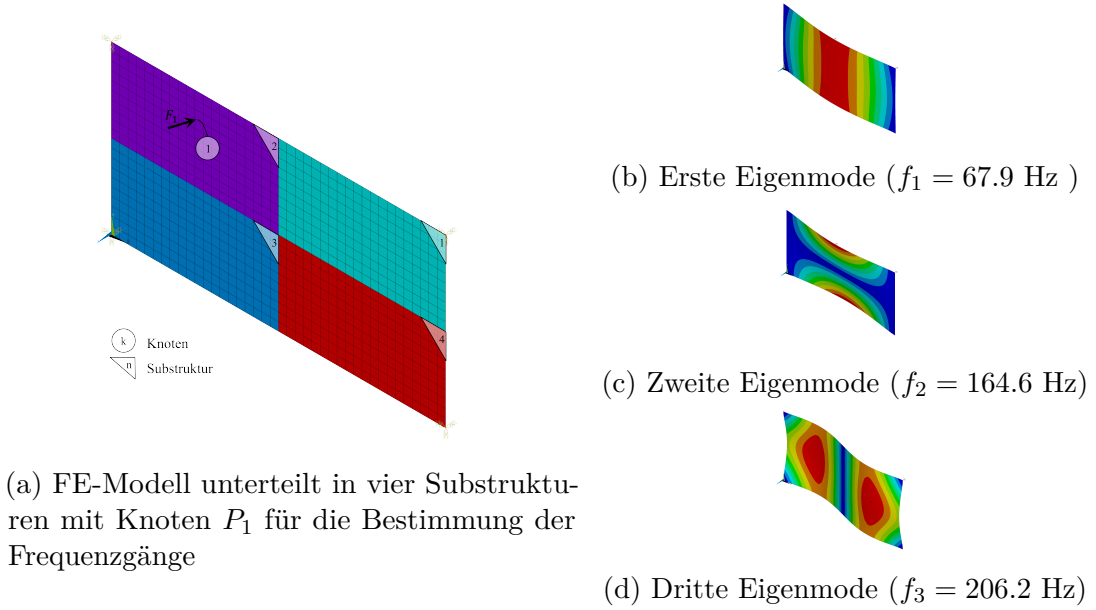


Abbildung 5.4: Beispielhaftes Modell einer rechteckigen Platte zur Analyse der Parametereinflüsse

### 5.3.1 Dichte

Die Dichte  $\rho$  der verwendeten Materialien wirkt sich nur auf die Elementmassenmatrix in Gleichung (5.50) und nicht auf die Steifigkeit des Systems aus. Für ein einzelnes finites Element wird die Dichte als konstanter Wert angenommen und kann dadurch vor das Integral gezogen werden. In der vorliegenden Arbeit wird sich zudem darauf beschränkt, dass jede Substruktur des betrachteten Systems immer aus jeweils einem homogenen Material aufgebaut ist. Weiterhin werden die Modelle der Substrukturen mit einer bekannten Referenzdichte  $\rho_0$  modelliert. Im parametrischen Modell werden dann Faktoren  $\delta_\rho^s$  eingeführt, die die gewünschten Parameter der Substrukturen einstellen. Die Gesamtmassenmatrix (Gl. (5.45)) lautet folglich

$$\hat{\mathbf{M}}([\delta_\rho^1, \dots, \delta_\rho^{n_{sub}}]) = \sum_{s=1}^{n_{sub}} \delta_\rho^s \hat{\mathbf{M}}^s \quad (5.51)$$

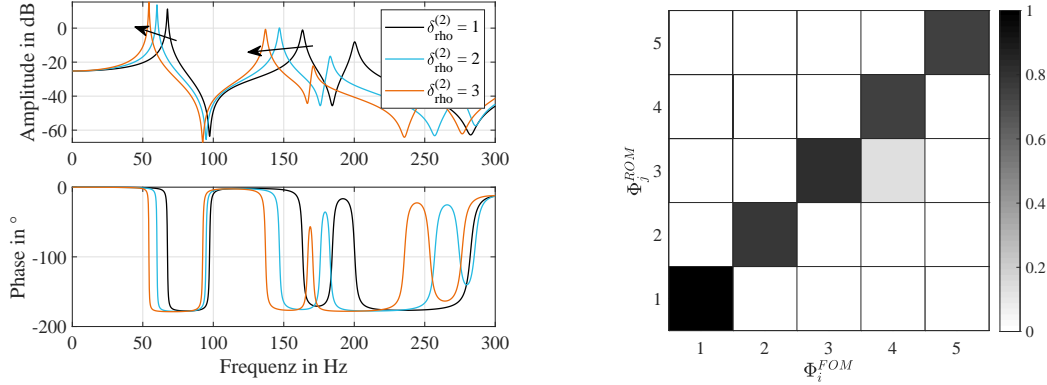
mit  $\delta_\rho^s = \rho^s / \rho_0$ .

Die Änderung der Dichte in Substruktur (2) bewirkt ein Verschieben der Eigenfrequenzen und eine Formänderung der Eigenmoden.

Bei steigender Dichte des Materials und somit steigender Gesamtmasse sowie gleichbleibender Steifigkeit verringern sich die Eigenfrequenzen des Systems (Abb. 5.5a). Während die erste Eigenmode des veränderten Systems noch große Ähnlichkeit mit der des Ausgangssystems besitzt, fallen die MAC-Werte für  $i, j \geq 2$  auf  $\text{MAC}_{(i,j)} \leq 0.7$ . Die Eigenmoden stimmen folglich nicht mehr gut überein.



### 5.3 Parametereinfluss und numerische Umsetzung



(a) Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung in Normalrichtung der Platte am Punkt  $P_1$  (b) MAC-Vergleich der Eigenvektoren für  $\delta_{rho}^{ROM} = 3$

Abbildung 5.5: Auswirkung der Variation der Dichte in Substruktur (2)

#### 5.3.2 Elastizitätsmodul

Der Einfluss des Elastizitätsmodul  $E$  wirkt sich dagegen nur auf die Elementsteifigkeitsmatrix (5.49) aus. Die numerische Umsetzung zur Berücksichtigung dieses Parameters im PROM erfolgt analog zur Dichte. Es wird ein relativer Faktor  $\delta_E^s$  definiert, der das gewünschte Elastizitätsmodul  $E^s$  einer Substruktur  $s$  und das Referenz-Elastizitätsmodul  $E_0$  zueinander ins Verhältnis setzt. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich demnach mit

$$\hat{\mathbf{C}}([\delta_E^1, \dots, \delta_E^{n_{sub}}]) = \sum_{s=1}^{n_{sub}} \delta_E^s \hat{\mathbf{C}}^s \quad (5.52)$$

und  $\delta_E^s = E^s / E_0$ .

Abbildung 5.6a zeigt das Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung an Knoten  $P_1$ . Änderungen des Elastizitätsmoduls der Substruktur (2) ziehen ebenfalls Verschiebungen der Eigenfrequenzen nach sich. Je größer der E-Modul dabei gewählt wird, desto höher liegen die Eigenfrequenzen.

Dem MAC-Vergleich 5.6b können auf der Diagonalen für die ersten fünf Eigenmoden Werte größer 0.8 entnommen werden. Bezüglich der Eigenformen wirkt sich die Variation des E-Moduls also weniger stark als die Variation der Dichte aus.

#### 5.3.3 Dämpfung

Die mechanische Dämpfung eines dynamischen Systems wird in der vorliegenden Arbeit generell als Rayleigh-Dämpfung [30]

$$\hat{\mathbf{B}}^s = \alpha^s \hat{\mathbf{M}}^s + \beta^s \hat{\mathbf{C}}^s \quad (5.53)$$

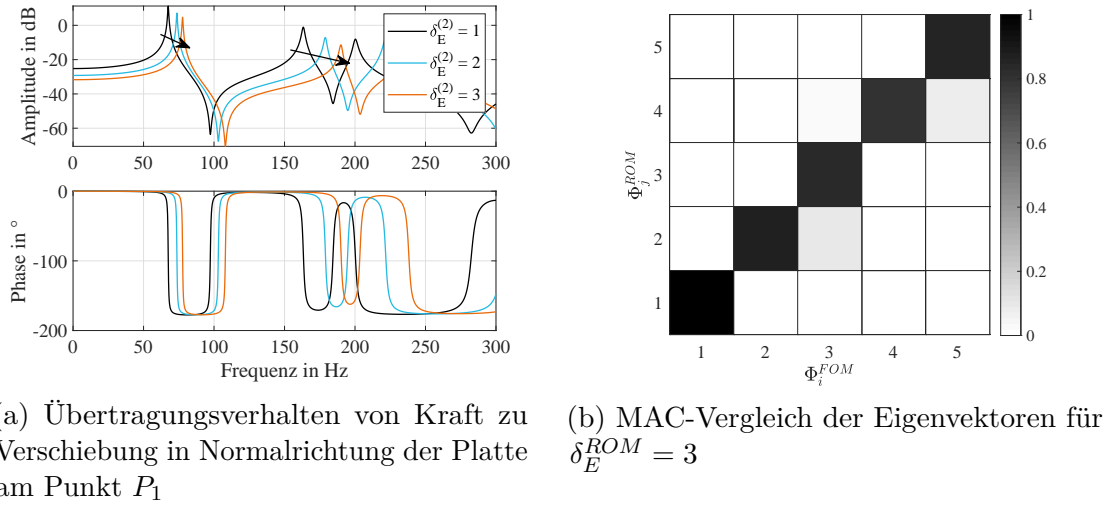


Abbildung 5.6: Auswirkung der Variation des E-Moduls in Substruktur (2)

modelliert. Der Vorteil dieser Dämpfungs-Hypothese besteht darin, dass mit nur zwei Parametern eine globale Systemdämpfung beschrieben werden kann. Die Formulierung (5.53) gilt auf Substruktur-Ebene und für jede Teilmatrix kann mit unterschiedlichen Beiwerten gerechnet werden. Die Gesamtmatrix  $\hat{\mathbf{B}}$  wird abschließend durch blockweises Zusammensetzen der einzelnen Komponenten erzeugt.

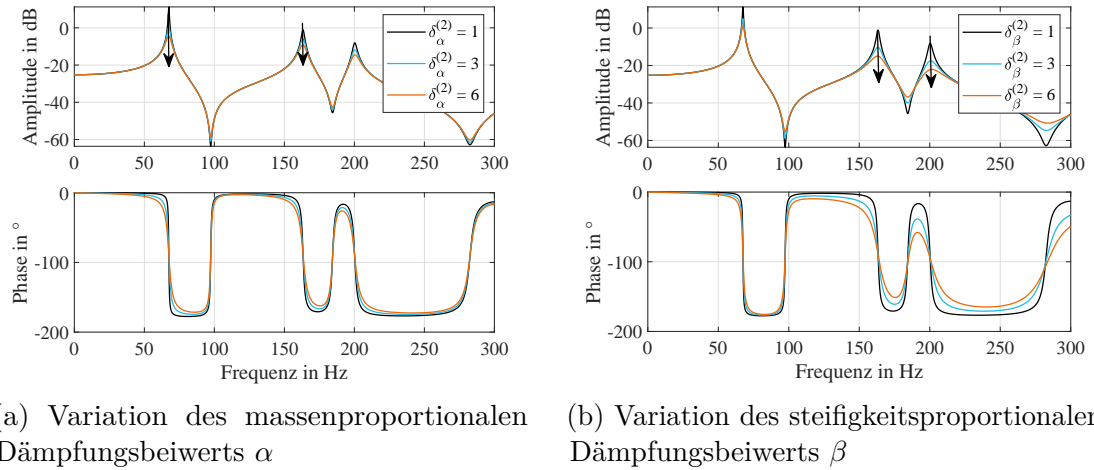
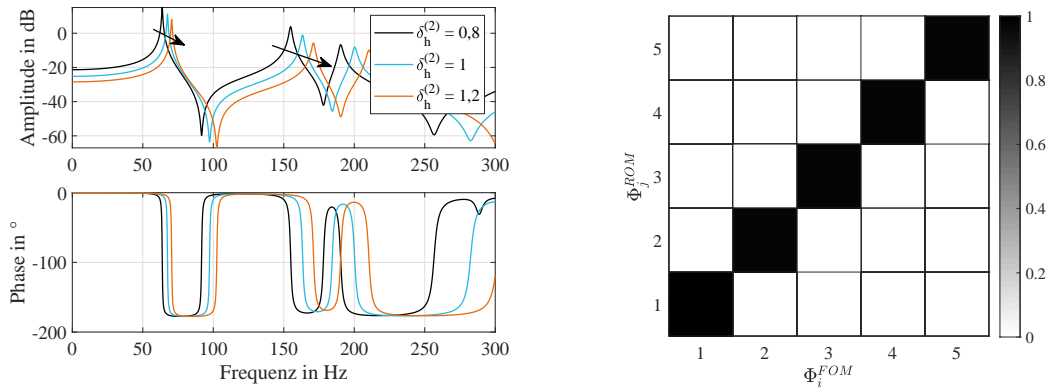


Abbildung 5.7: Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung in Normalrichtung der Platte am Punkt  $P_1$  unter Variation der Rayleigh-Dämpfungsbeiwerte in Substruktur (2)

Die Dämpfung des Systems beeinflusst nahezu ausschließlich die Höhe der Amplituden und wirkt sich insbesondere in den Resonanzen aus. Der massenproportionale Term  $\alpha \hat{\mathbf{M}}$  ist eine Art äußere Dämpfung mit dem größten Einfluss auf niedrige Frequenzen. Die steifigkeitsproportionale Dämpfung  $\beta \hat{\mathbf{C}}$  kann als innere Dämpfung oder Werkstoffdämpfung beschrieben werden. Sie wirkt sich stärker auf die hohen Frequenzen aus.

### 5.3.4 Schalendicke

Schalenmodelle werden in der FEM häufig für ausgedehnte, dünnwandige Strukturen verwendet. Schalen sind Flächentragwerke, bei denen zwei Abmessungen gegenüber der dritten (Dickenrichtung) groß sind. Die Schalendicke geht nichtlinear in die Gesamtsteifigkeitsmatrix und linear in die Gesamtmassenmatrix ein. Aus diesem Grund wird die Abhängigkeit der Systemmatrizen von der Schalendicke über den Ansatz der Interpolation lokal reduzierter Modelle umgesetzt (Abschnitt 5.2.2).



(a) Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung in Normalrichtung der Platte am Punkt  $P_1$  (b) MAC-Vergleich der Eigenvektoren für  $\delta_h^{ROM} = 1.2$

Abbildung 5.8: Auswirkung der Variation der Plattendicke in Substruktur (2)

Abbildung 5.8a zeigt den Einfluss der Dicke auf den Frequenzgang. Je dicker die Schale gewählt wird, desto höher liegen die Eigenfrequenzen. Ein relevanter Effekt tritt dabei schon bei verhältnismäßig geringen Parameteränderungen auf. Im MAC-Vergleich sind dagegen kaum Unterschiede zu erkennen. Die Werte liegen alle über 0.95.

## 5.4 Integration in die modellbasierte Systementwicklung

In Kapitel 5 wurde die entwickelte Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen erläutert. Es wurden die Anforderungen definiert, der grundsätzliche Ablauf vorgestellt und die Parametrierung sowie die numerische Umsetzung anhand eines einfachen Beispiels besprochen.

Bei dem Vorgehen handelt es sich um eine zweistufige hybride Ordnungsreduktion auf Basis der CMS-Methode und einer Interpolation lokal reduzierter Modelle. Die Methode ist in Abbildung 5.9 in Form eines Ablaufdiagramms dargestellt. Durch den hybriden Ansatz können analytische Parameterabhängigkeiten mit der CMS und nichtlineare oder nicht-funktional beschreibbare Effekte mit einer interpolationsbasierten Methode abgebildet werden. Die zwei Stufen des Verfahrens ermöglichen es

zum einen bereits frühzeitig ordnungsreduzierte Modelle zu nutzen und die Interpolationen effizient durchzuführen. Zum anderen erfolgt die Feinabstimmung, d.h. die Abwägung zwischen Genauigkeit und Recheneffizienz, erst am Ende des Verfahrens und es kann somit aufgabenspezifisch und sogar zur Simulationslaufzeit adaptiert werden.

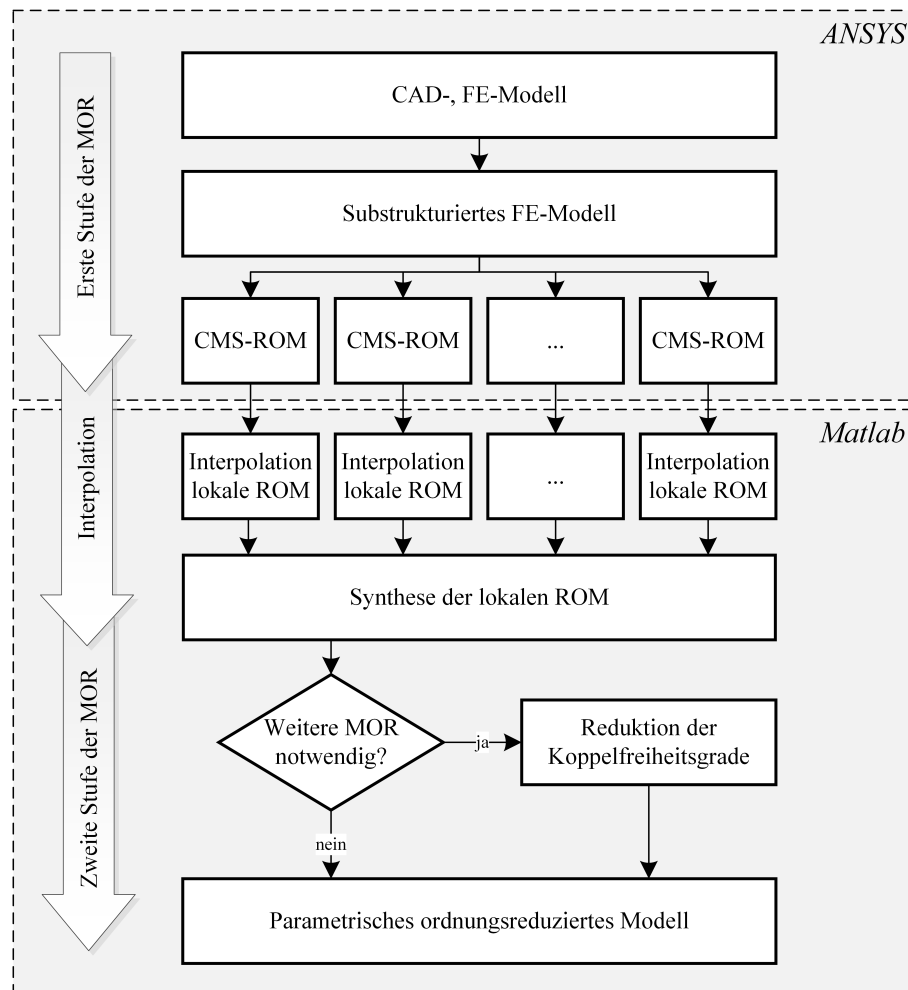


Abbildung 5.9: Ablaufdiagramm der parametrischen Modellbildung

In der ersten Stufe des vorgeschlagenen Verfahrens wirkt sich die etablierte und in effizienter Implementierung verfügbare Component Mode Synthesis sehr vorteilhaft auf die Offline-Phase der Modellbildung aus. Insbesondere die Möglichkeit zur Automatisierung, die Güte der Approximation und die benötigte Rechenzeiten sind für die Anwendung in der Strukturmechanik günstig. Durch die zweite Stufe können die Modelle für die Online-Phase abhängig von den (Echtzeit-)Anforderungen in Komplexität und Genauigkeit skaliert werden.

Die beiden vorgestellten Gütekriterien ermöglichen es, sowohl das Ausgangsmodell mit dem ordnungsreduzierten Modell, als auch Messdaten mit Simulationsdaten zu vergleichen. Dies ist für die unterschiedlichen Anwendungsszenarien der parametrischen Modelle sinnvoll. In Abbildung 5.10 sind die möglichen Anknüpfungspunkte in

## 5.4 Integration in die modellbasierte Systementwicklung

der modellbasierten Systementwicklung (vgl. Abbildung 2.2) aufgezeigt.

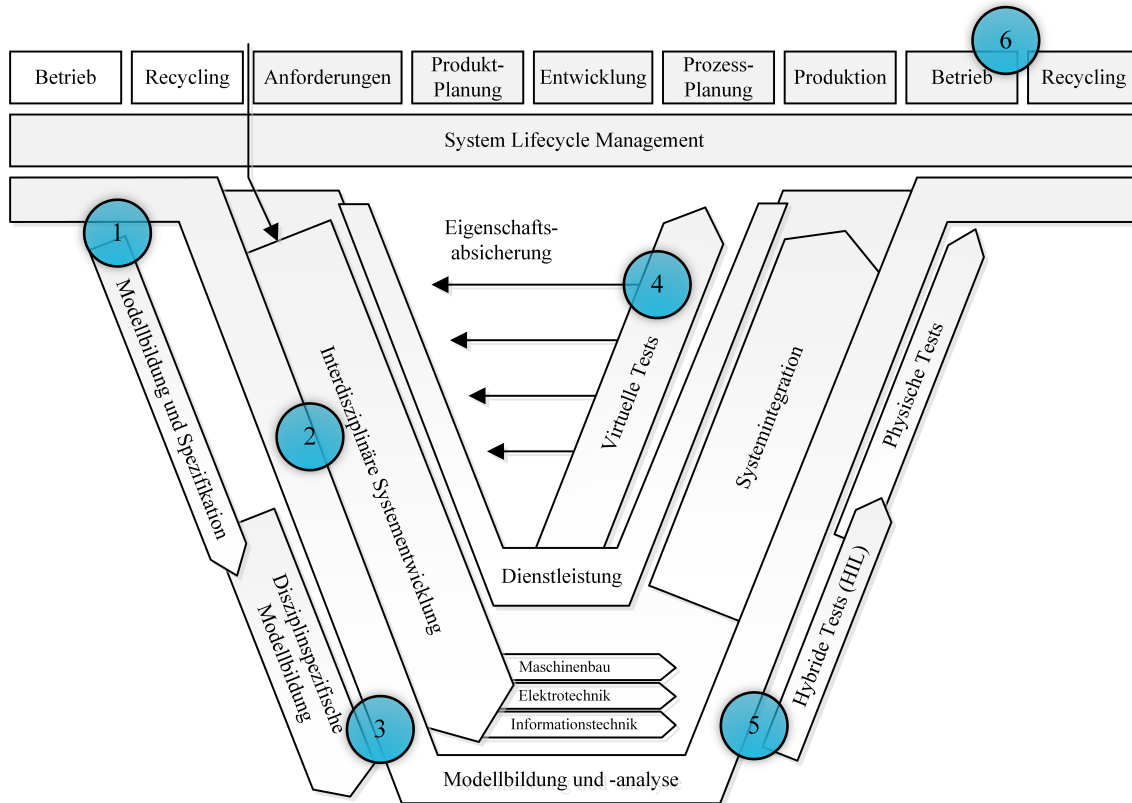


Abbildung 5.10: Möglichkeiten der parametrischen Modelle zur Integration in die modellbasierte Systementwicklung

Im Einzelnen können die parametrischen Modelle demnach in sechs Anwendungsszenarien eingesetzt werden.

1. In der Definitions- und Spezifikationsphase kommen erste einfache Modelle zum Einsatz. Daten aus dem Betrieb früherer Generationen eines Produktes und abgeglichenen Modelle aus der Betriebsphase können die Entwicklungszyklen erheblich reduzieren.
2. In der Konzeptfindung und interdisziplinären Systementwicklung sind effiziente und parametrische Modelle unabdingbar. Es besteht die Notwendigkeit verschiedene Disziplinen zu koppeln und viele Varianten zu berechnen. Optimierungsaufgaben in der Mechatronik müssen zudem ebenfalls auf Systemebene durchgeführt werden.
3. Durch den vorgeschlagenen Arbeitsablauf ist es weiterhin möglich, die gleichen Modelle auch für die Disziplinspezifische Auslegung zu nutzen. Die hierbei üblicherweise genutzte Finite-Elemente-Methode stellt schließlich die Basis des Verfahrens da. Aufgrund der verwendeten linearen Abbildungen und Projektionen ist es möglich von einer auf Systemebene optimierten Komponente wieder zurück auf die ursprüngliche FE-Modell-Formulierung zu schließen.

4. Aufgrund der hohen Recheneffizienz eignen sich die parametrischen und echtzeitfähigen Modelle für die virtuelle Eigenschaftsabsicherung und Validierung der zu entwickelnden Systeme.
5. Unter der Bedingung, dass die geforderte Echtzeitfähigkeit erreicht werden kann, gilt Punkt 4 ebenfalls für hybride Tests und Hardware-in-the-Loop Versuche.
6. Abschließend ist es möglich die parametrischen Modelle im Betrieb eines Produktes zu nutzen. Insbesondere werden diese Modelle für vernetzte Systeme, die sich auf äußere Bedingungen adaptieren oder selbst-optimieren, benötigt.

In den folgenden Kapiteln werden die Anwendungsszenarien an einfachen und sich in der Komplexität steigernden Beispielen demonstriert. Zunächst wird die Modellbildung mithilfe des entwickelten Vorgehens anhand numerischer Untersuchungen im Kontext der Konzeptfindung, des Leichtbaus und der strukturdynamischen Optimierung vorgestellt. Nachfolgend werden die Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten Modelle in Kombination mit gemessenen Daten besprochen.

# Kapitel 6

## Numerische Untersuchungen und experimentelle Validierung

In diesem Kapitel wird die Leistungsfähigkeit der entwickelten Methode anhand eines einfachen strukturellen Anwendungsfalls, mit dem Fokus auf der Konzeptfindung, der Optimierung und dem Detailentwurf (vgl. Abschnitt 2.1.1), diskutiert. Weiterhin werden die Approximationsgüte und die Recheneffizienz in Abhängigkeit der Eingangsgrößen für die Modellbildung untersucht. Abschließend wird die Echtzeitfähigkeit und Parametrierbarkeit der Modelle zur Laufzeit in einem Laborversuch experimentell validiert. Alle Berechnungen wurden mit ANSYS R17.2 und Matlab R2018b durchgeführt.

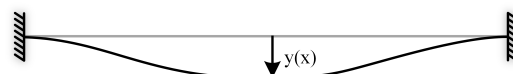
### 6.1 Beidseitig eingespannter Biegebalken

#### 6.1.1 Modellbildung

Als Grundlage zur Modellbildung dient ein beidseitig eingespannter Biegebalken (Abbildung 6.1), welcher in den folgenden Abschnitten zur Einflussanalyse der Modellparameter (Abschnitt 6.1.2), als Anwendungsbeispiel für eine Strukturoptimierung (Kapitel 6.2) sowie zur Validierung des echtzeitfähigen Strukturmodells (Kapitel 6.3) genutzt wird.



(a) 3-D-Darstellung



(b) Skizze

Abbildung 6.1: Beidseitig eingespannter Biegebalken

Der beidseitig eingespannte Biegebalken gewährleistet ein einfaches Modell mit

klar getrennten Eigenwerten, an dem Effekte der Modellbildung und der Simulationsumgebung gut dargestellt werden können. Die Einspannung ist mit dünnen Dämpfungsmatten und zwei Einspannblöcken realisiert und die Maße des freien Balkenteils sind in Tabelle 6.1 gegeben. Als Materialdaten werden für die numerischen Untersuchungen Standardwerte für Stahl ( $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ ) verwendet. Das initiale Modell des Biegebalkens weist einen rechteckigen homogenen Querschnitt auf und die Randbedingungen wurden als feste Einspannung definiert. Hier und im Folgenden sind in den FE-Analysen Schalenelemente des Typs SHELL181 und Volumenelemente des Typs SOLID186 verwendet worden.

Tabelle 6.1: Abmessungen des Biegebalkens

Länge	700 mm
Breite	60 mm
Dicke	8 mm

Das FE-Modell des Biegebalkens in Abbildung 6.2 wurde mit den in Tabelle 6.1 angegebenen Werten aufgebaut. Das Modell besteht aus 280 Schalenelementen und 378 Knoten mit je sechs Freiheitsgraden.

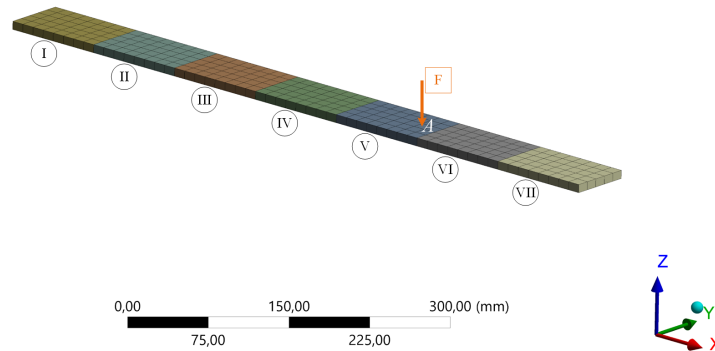


Abbildung 6.2: FE-Modell des Biegebalkens

Der Biegebalken ist sieben gleichgroße Substrukturen (I - VII) unterteilt und besitzt im Frequenzbereich bis 300 Hz zwei Eigenmoden. Die Eigenformen sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Das berechnete Übertragungsverhalten von Kraft zur Verschiebung in z-Richtung an Position A (Abbildung 6.4) dient für die folgende Einflussanalyse der Modellparameter als Referenzlösung. Die Referenzlösung wurde durch eine harmonische Finite-Elemente-Analyse des unreduzierten Ausgangssystems berechnet. Die Position A liegt im Abstand  $x_A = 480 \text{ mm}$  von der linken Einspannung entfernt. Die Position wurde so ausgewählt, dass die beiden ersten Eigenfrequenzen gut steuer- und beobachtbar sind.

Die Materialparameter Elastizitätsmodul  $E^s$ , Dichte  $\rho^s$  und Rayleigh-Dämpfungsbeiwerte  $\alpha^s, \beta^s$  sowie die Schalendicke  $h^s$  der einzelnen Substrukturen können



## 6.1 Beidseitig eingespannter Biegebalken

unabhängig variiert werden. Somit entsteht ein parametrisches Modell mit 35 individuellen Designvariablen.

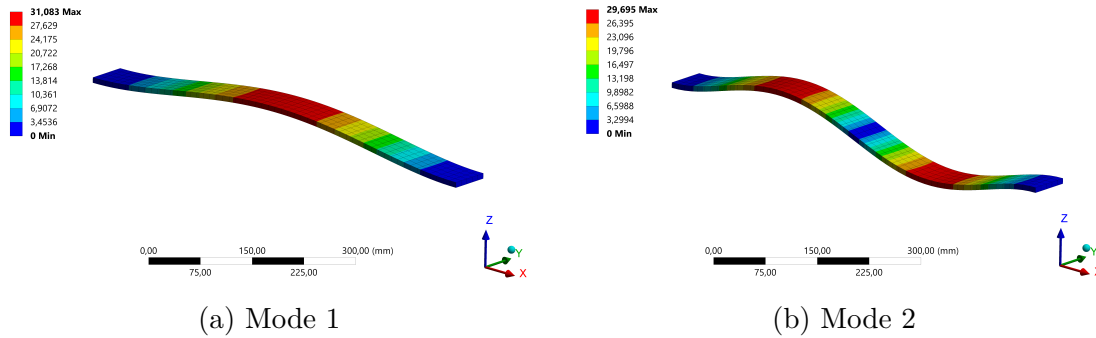


Abbildung 6.3: Ersten beiden Eigenmoden des beidseitig eingespannten Biegebalkens

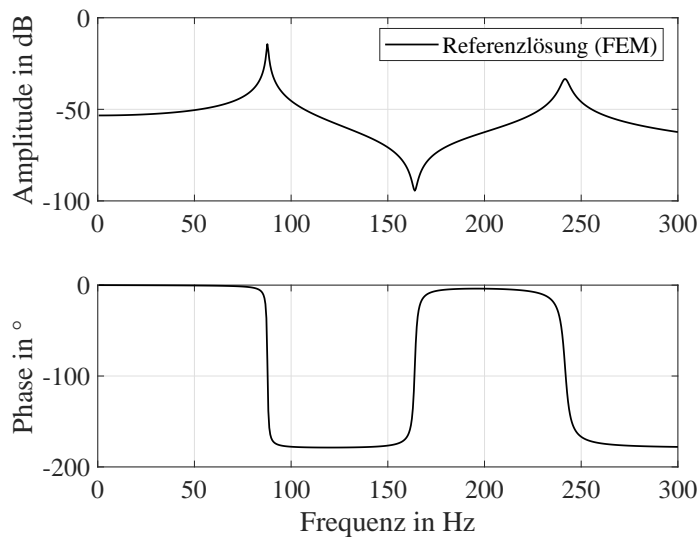


Abbildung 6.4: Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung an Position A des beidseitig eingespannten Biegebalkens

### 6.1.2 Einfluss der Modellparameter

In Kapitel 5 wurde die entwickelte zweistufige und hybride Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme vorgestellt. Sowohl die beiden Stufen der Modellordnungsreduktion als auch die Interpolation der lokalen ROM besitzen jeweils wesentliche Einflussfaktoren, die sich auf die Modellgüte, die Dimension des finalen PROM oder die Offline-Berechnungsdauer auswirken. Im Ablaufdiagramm in Abbildung 5.9 finden sich diese in der dritten, vierten und sechsten Ebene wieder. Nachfolgend sind die Modellparameter in Reihenfolge des Auftretens detailliert aufgeführt:

1. Zunächst wird eine geeignete Anzahl von Eigenmoden, die für die Component Mode Synthesis verwendet werden, gewählt. Diese beeinflusst hauptsächlich die Dimension des PROM und den gültigen Frequenzbereich.
2. Für die Interpolation müssen verschiedene lokale ROM einer Substruktur berechnet werden. Die Anzahl der verwendeten ROM wirkt sich dabei auf die Modellgüte des PROM und im Besonderen auf die Dauer der Offline-Berechnungsphase aus.
3. In der zweiten Stufe des PMOR-Verfahrens wird erneut eine Anzahl von reduzierten Koordinaten bestimmt, die ausschlaggebend für die folgende Verminderung der Dimension des bereits reduzierten und interpolierten Modells ist.

Zunächst wird der Einfluss der Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden für die Component Mode Synthesis untersucht. In Abbildung 6.5 ist der relative Fehler der Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung für CMS-ROM mit  $n_{cms} = 2, 8$  und  $16$  berücksichtigten Eigenmoden pro Substruktur dargestellt. Der relative Fehler beschreibt dabei den Quotienten aus dem absolutem Fehler und dem Referenzwert. Als Referenz wurde hier der Amplitudengang des FOM gewählt.

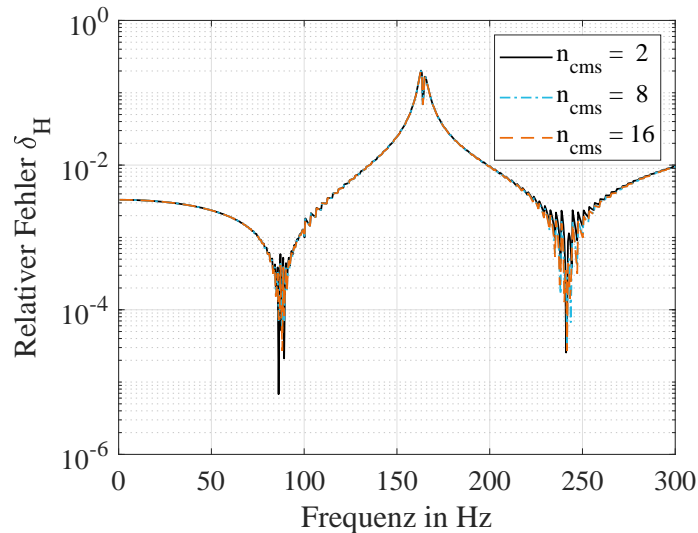
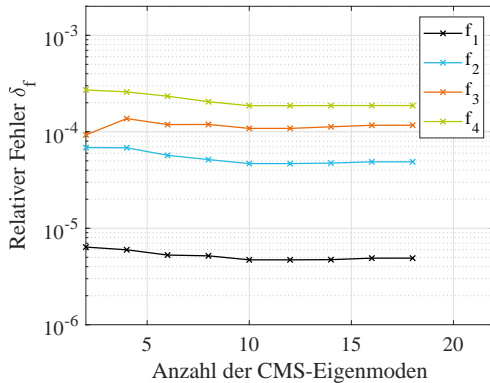


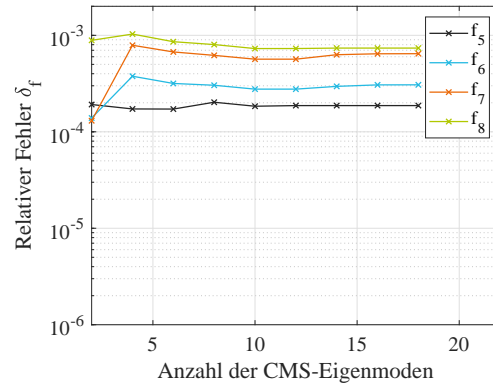
Abbildung 6.5: Relativer Fehler der Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung für CMS-ROM mit unterschiedlicher Anzahl an berücksichtigten Eigenmoden gegenüber dem Amplitudengang des Referenzmodells

Die 216 Koppel-Freiheitsgrade wurden vollständig in das reduzierte Modell übernommen und es wurde keine Interpolation von lokalen ROM durchgeführt. Die Dimension der Systemmatrizen berechnet sich demnach aus der Anzahl der Substrukturen multipliziert mit der Anzahl der CMS-Moden und den Koppel-Freiheitsgraden des Gesamtsystems  $n = n_{sub} \times n_{cms} + n_k$ . Für die untersuchten Varianten entspricht dies der Dimension 230, 272 bzw. 328. Für die Offline-Phase der Modellbildung sind die mittleren Berechnungszeiten  $t = 2$  s, 4 s und 8 s gemessen worden.

Im Bereich der Eigenfrequenzen liegt der relative Fehler bei deutlich unter 0.1 %, die Nullstelle im Amplitudengang wird dagegen schlecht approximiert und es ergibt sich im Frequenzbereich 150-170 Hz ein Fehler bis zu 20 %. Aufgrund der kleinen absoluten Werte, die in einer Nullstelle des Übertragungsverhaltens approximiert werden, ist dieses Phänomen bei der Auswertung des relativen Fehlers erwartbar. Die Anzahl der gewählten Eigenmoden hat dabei keinen Einfluss auf die Modellgüte. In den Abbildungen 6.6 sind ergänzend die relativen Fehler der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der gewählten Anzahl von CMS-Eigenmoden pro Substruktur dargestellt. Zwischen zwei und zehn CMS-Eigenmoden nimmt der Fehler leicht ab, wobei er für die ersten acht Eigenfrequenzen insgesamt auf einem sehr geringen Niveau liegt ( $\delta_f \leq 0.1$  %). Ab zehn berücksichtigten Eigenmoden stellt sich keine weitere Verbesserung bei der Approximation der Eigenfrequenzen ein. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Wahl der CMS-Eigenmoden im vorliegenden Fall nur einen sehr geringen Einfluss auf die Modellgüte und den gültigen Frequenzbereich des PROM hat. Dies kann auf die geringe Anzahl der klar getrennt auftretenden Eigenfrequenzen zurückgeführt werden. Zudem werden bei sieben Substrukturen und zwei Eigenmoden pro Substruktur im Modell mit der geringsten Systemordnung bereits 14 Eigenfrequenzen berücksichtigt.



(a) Erste bis vierte Eigenfrequenz



(b) Fünfte bis achte Eigenfrequenz

Abbildung 6.6: Relativer Fehler der approximierten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der gewählten Anzahl von CMS-Eigenmoden pro Substruktur

Als zweiter relevanter Einflussparameter bei der Modellbildung der PROM wird der Abstand der Stützstellen für die Interpolation lokaler ROM einer Substruktur analysiert. Der Abstand wird als Anteil und in Abhängigkeit des Nominalwertes mit  $\Delta h = \mu \times h_{nominal}$  beschrieben. Für die numerische Untersuchung wurden Modelle aufgebaut, die eine Variation der Schalendicke von Substruktur V ermöglichen (vgl. Abbildung 6.2). Um den Referenzwert  $h_V$  wurden zwei lokale ROM mit jeweils  $h_{V,1} = (1 - \mu) \times h_V$  und  $h_{V,2} = (1 + \mu) \times h_V$  erzeugt. Der Referenzzustand wurde daraufhin durch ein interpoliertes Modell berechnet und der relative Fehler bezüglich der Lage der Eigenfrequenzen in Abbildung 6.7 aufgetragen. Es wurden die Stützstellen-Abstände  $\Delta h = \mu \times 8$  mm mit  $\mu = 0.05, 0.1, 0.2$  und  $0.3$  untersucht.

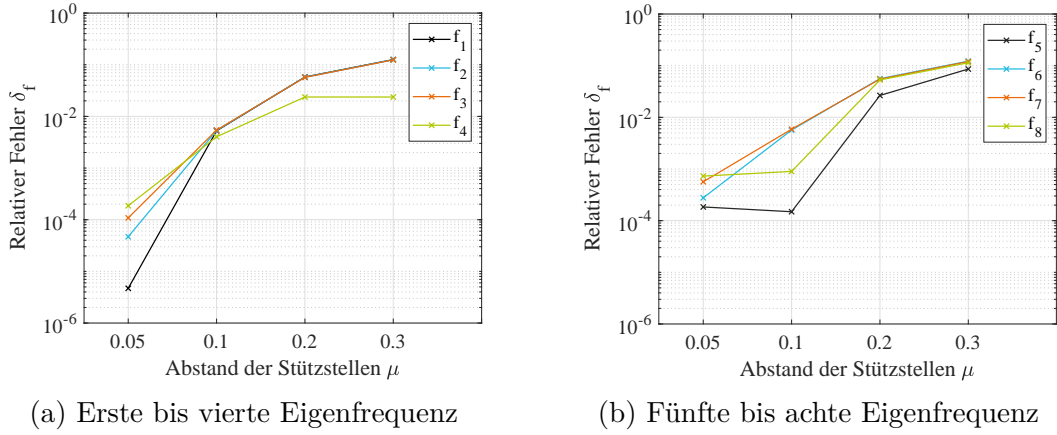


Abbildung 6.7: Relativer Fehler der approximierten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit des gewählten Stützstellen-Abstandes zwischen zwei benachbarten lokalen ROM

Für  $\mu \leq 0.1$  ergibt sich dabei eine hohe Modellgüte und ein maximaler Approximationsfehler von 0.7 %. Für einen Stützstellen-Abstand  $\mu = 0.2$  mm erhöht sich der relative Fehler bereits für die zweite Eigenfrequenz auf mehr als 6 % und wird daher nicht für weitere Anwendungen empfohlen.

Abbildung 6.8 zeigt den relativen Fehler der Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung in z-Richtung an Position A. In dieser Darstellung wird die Abnahme der Modellgüte bei Vergrößerung der Stützstellen-Abstände über den gesamten Frequenzbereich deutlich. Diese Beobachtung wird zudem durch die  $H_2$ -Normen der betrachteten Systeme gestützt. Ein Vergleich der  $H_2$ -Normen in Abhängigkeit der Stützstellen-Abstände ist in Tabelle 6.2 gegeben. Während das FE-Referenzmodell und das PROM mit  $\mu = 0.05$  identische Werte aufweisen, steigt der Fehler  $\delta_{H_2}$  für größere Abstände deutlich an. Wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, kann die  $H_2$ -Norm als ein Maß für die in der Impulsantwort enthaltene Energie und als durchschnittliche Verstärkung des Systems über alle Frequenzen interpretiert werden. Demnach wirkt sich die Wahl des Stützstellen-Abstands unmittelbar auf die Energiebilanz im Modell aus.

Tabelle 6.2: Vergleich der  $H_2$ -Normen der Modelle in Abhängigkeit der Stützstellen-Abstände

	$H_2$ -Norm	Fehler $\delta_{H_2}$
FOM	0.3138	
PROM $\mu = 0.05$	0.3138	0.0 %
PROM $\mu = 0.1$	0.3064	3.1 %
PROM $\mu = 0.2$	0.2862	9.3 %
PROM $\mu = 0.3$	0.2581	18.2 %

Die Dimension der Systemmatrizen bleibt durch den Modellparameter  $\mu$  unberührt und die Berechnungsdauer der Offline-Phase erhöht sich linear mit zunehmender Anzahl lokaler ROM. Für den untersuchten Fall ergeben sich 31, 16, 8 und 6 lokale

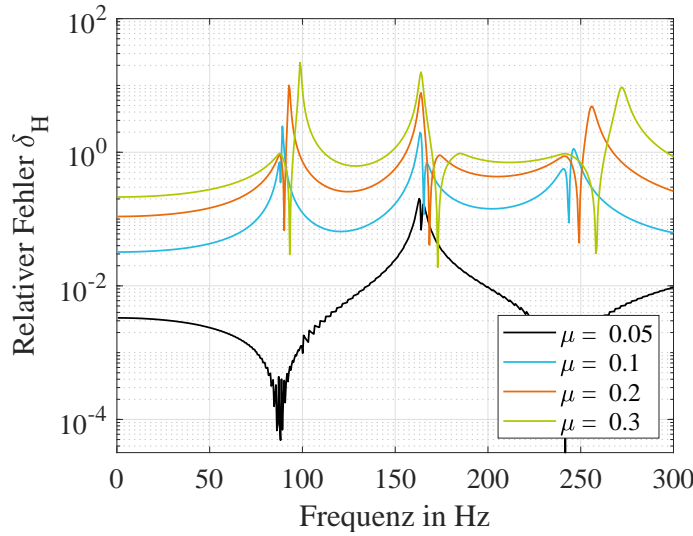


Abbildung 6.8: Relativer Fehler der Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung für PROM mit unterschiedlichen Stützstellen-Abständen gegenüber dem Amplitudengang des Referenzmodells

ROM für den definierten Parameterraum  $\{h_{min} = 4 \text{ mm} ; h_{max} = 16 \text{ mm}\}$ .

Die dritte Einflussgröße ist die Anzahl der reduzierten Koordinaten  $n_k$ , die die Zwangsdeformationen an den Koppelstellen der Substrukturen  $s$  abbilden. Für diesen Modellparameter wurde der mittlere relative Fehler der Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung berechnet und in Abbildung 6.9 aufgetragen.

Die Untersuchung wurde auf Basis von CMS-Modellen mit  $n_{cms} = 2$  durchgeführt. Die 36 Koppel-Freiheitsgrade in jeder Schnittstelle zwischen zwei Substrukturen  $s_i, s_{i+1}$  wurden auf jeweils 1-25 Koordinaten reduziert. Die Dimension der Systemmatrizen berechnet sich demnach aus der Anzahl der Substrukturen multipliziert mit der Anzahl der CMS-Moden und der Anzahl der Schnittstellen multipliziert mit der Anzahl der Koppel-Freiheitsgrade  $n = n_{sub} \times n_{cms} + n_{int} \times n_{k,i} = 14 + 6 \times n_{k,i}$ .

Die Variation dieses Modellparameters wirkt sich auf den gesamten Frequenzbereich gleichermaßen aus. Für den untersuchten Anwendungsfall und für einen angestrebten Modellfehler von maximal 1 % im Frequenzbereich 0-300 Hz ist Abbildung 6.9 eine Anzahl von  $\geq 10$  reduzierten Freiheitsgraden pro Koppelstelle zu entnehmen.

Für die parametrische Modellbildung eines strukturdynamischen Systems, unter Verwendung der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode, lassen sich folgende Aussagen zusammenfassend feststellen: Die Anzahl der Eigenmoden, die für die Component Mode Synthesis verwendet werden, beeinflusst entscheidend den Gültigkeitsbereich des Modells und wirkt sich hauptsächlich auf die Modellgüte im Bereich der Eigenfrequenzen aus. Eine Hinzunahme von Eigenmoden, die außerhalb des zu betrachtenden Frequenzbereichs liegen, bewirkt kaum eine Verbesserung der Modellgüte. Die Anzahl der verwendeten lokalen ROM zur Interpolation nichtlinearer Designvariablen wirkt

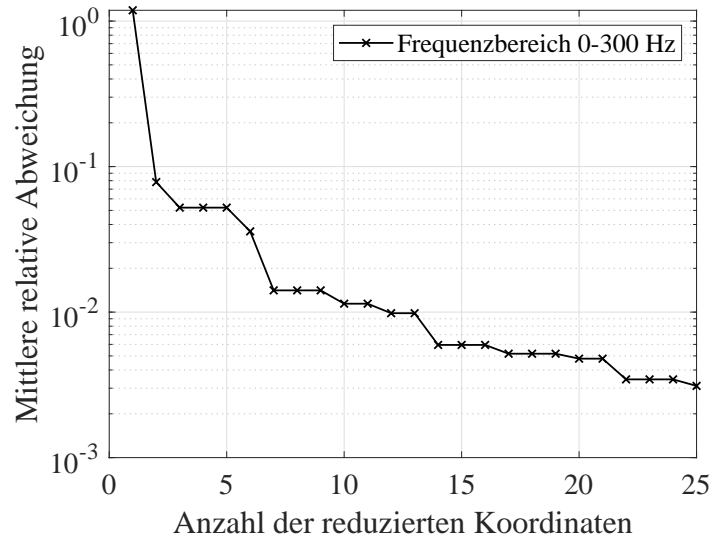


Abbildung 6.9: Mittlerer relativer Fehler der Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung in Abhängigkeit der gewählten Anzahl von reduzierten Koppel-Freiheitsgraden

sich ausschlaggebend auf die Dauer der Offline-Phase aus, eine gute Abtastung des Parameterraums ist jedoch notwendig um eine ausreichende Modellgüte des PROM zu gewährleisten. Die Anzahl der reduzierten Koordinaten in den Koppelstellen der Substrukturen wirkt sich auf den gesamten Frequenzbereich aus. Der relative Fehler ist dabei insbesondere in den Frequenzbereichen ohne Eigenfrequenzen beobachtbar. Aus der numerischen Einflussanalyse ergibt sich keine allgemeingültige Aussage zur Wahl der Modellparameter. Diese müssen immer in Abhängigkeit der Anforderung des Anwendungsfalls gewählt werden.

## 6.2 Strukturoptimierung

### 6.2.1 Aufgabenstellung

Im Kontext des Leichtbaus und der Strukturoptimierung ist es heutzutage üblich, Konzeptentwürfe technischer Systeme hinsichtlich des Materialaufwands, einer günstigen Massenverteilung und abgestimmten Steifigkeiten zu bewerten. Hierbei kommen nicht nur globale Topologie-Optimierungen, sondern auch Form- und Größenoptimierungen zum Einsatz. Um ein verbessertes Design zu finden, werden die Dimensionen von Querschnitten oder die Dicken von flächigen Strukturen optimiert.

Anhand des beidseitig eingespannten Biegebalkens aus Abschnitt 6.1 und unter Verwendung eines neu entwickelten parametrischen Modells aus Kapitel 5 wird diese Art der strukturdynamischen Analyse und Optimierung im Folgenden untersucht. Der Balken wird hierzu in sieben gleichgroße Substrukturen mit variablen Dicken  $\mathbf{h}$  unterteilt. Das Optimierungsziel ist dabei, eine minimale Durchbiegung  $y(\mathbf{h})$  des Balkens bei gleichbleibender Belastung und konstanten Materialwerten zu realisieren. Zudem

wird gefordert, dass die Masse  $m(\mathbf{h})$  des optimierten Balkens nicht größer als die Masse  $m_0$  der Ausgangsversion sein darf. Das mathematische Optimierungsproblem und die entsprechende Gleichungsnebenbedingung lauten somit:

$$\min_{\mathbf{h} \in H} y(\mathbf{h}) \quad | \quad H = \{\mathbf{h} \mid m(\mathbf{h}) \leq m_0\} \quad (6.1)$$

mit  $\mathbf{h} = \{4 \text{ mm}; 16 \text{ mm}\}$  und der Masse des unveränderten Balkens  $m_0 = 2.64 \text{ kg}$ .

### Analytische Referenzlösung

Zur Validierung des FE-Modells, des PROM und später auch der Optimierungsergebnisse wird zunächst die analytische Lösung des Biegebalkens bestimmt. Hierzu werden die Verschiebungen, die Biegemomente und Querkräfte gemäß der Biegelinie aus [73] berechnet. Die resultierenden Verläufe entlang der Längsrichtung des Biegebalkens sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Belastet ist der Balken mittig ( $x = 350 \text{ mm}$ ) mit  $F_m = 100 \text{ N}$ . Diese Lösung wird im Weiteren als analytische Referenzlösung genutzt.

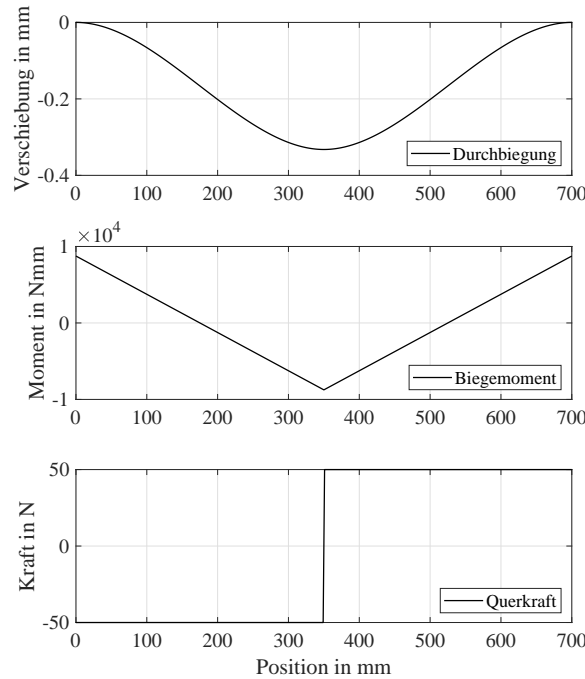


Abbildung 6.10: Verschiebungen, Biegemomente und Querkräfte an einem beidseitig eingespannten Biegebalken mit mittiger Einzellast von  $F_m = 100 \text{ N}$

Die Differentialgleichungen der Biegelinie sind zwar für veränderliche Biegesteifigkeiten  $EI$  und damit auch für verschiedene Balkendicken formuliert, jedoch wird der Aufwand für die Integration der Differentialgleichungen hierbei extrem groß. Bei praxisnahen Problemen ist eine geschlossene Lösung durch Integration der Differentialgleichungen nicht mehr praktikabel [35].

Aus diesem Grund wird für die Lösung mit variablen Größen ein Differenzenverfahren verwendet. Dies basiert auf der Idee, die Differentialquotienten in der

Differentialgleichung und die Randbedingungen eines Randwertproblems durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Dabei wird der Biegebalken in Abschnitte aufgeteilt und an den Stützstellen eine Näherungslösung berechnet. Mit der zentralen Differenzenformel

$$y'_i \approx \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_i = \left( \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) \quad (6.2)$$

wird der Sekantenanstieg von Stützstelle  $i - 1$  zu  $i + 1$  berechnet. Dabei ist die Position der Stützstellen durch  $x$ , die Durchbiegung durch  $y$  und die Länge eines Abschnitts durch  $h$  repräsentiert. Für die Berechnung der Biegelinie mit dem Differenzenverfahren werden die ersten vier Ableitungen benötigt [35]. Die Abbildung 6.11 zeigt den Vergleich der Biegelinie aus der analytischen Berechnung und der zentralen Differenzenformel.

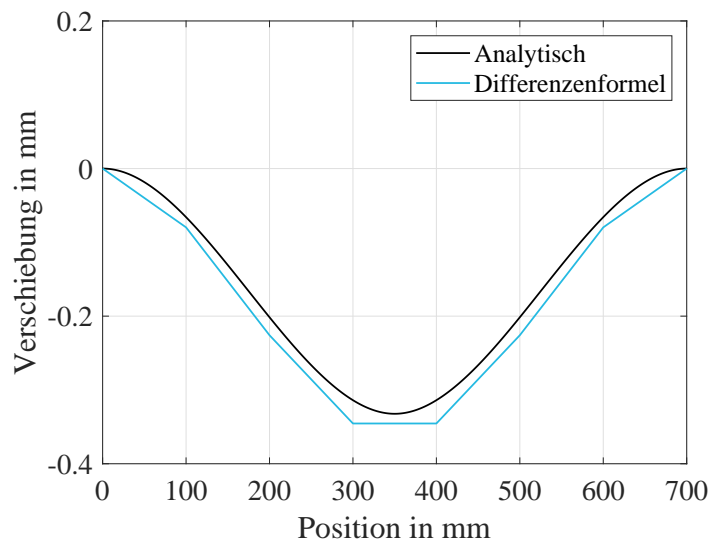


Abbildung 6.11: Vergleich der Biegelinie aus analytischer Berechnung und zentraler Differenzenformel

Um eine Vergleichbarkeit zu den FE-Berechnungen herzustellen, wurden die Stützstellen so gewählt, dass der Balken hier ebenfalls in sieben gleichgroße Abschnitte unterteilt ist. Aufgrund der oben beschriebenen Approximationen und der geringen Anzahl an Stützstellen, ist die Lösung des Differenzenverfahren - gemessen an der maximalen Durchbiegung - mit einem relativen Fehler von 4 % behaftet.

### Finite-Elemente-Modell

Als Ausgangsmodell wird das in Abschnitt 6.1 vorgestellte Finite-Elemente-Modell des Biegebalkens verwendet. Bei mittlerer Belastung mit einer Kraft von 100 N beträgt die maximale Durchbiegung  $y_{max} = 0.338$  mm mit einem relativen Fehler von ca.



2 % im Vergleich zur analytischen Referenzlösung. Die FE-Berechnung der statischen Lösung dauert dabei drei Sekunden.

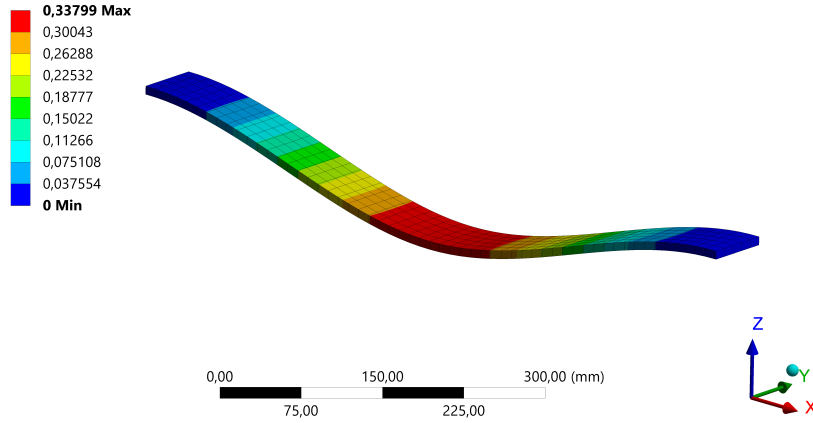


Abbildung 6.12: Statische Verformung des Biegebalkens aus der FE-Analyse

### Parametrisches ordnungsreduziertes Modell

Für die definierte Optimierungsaufgabe (Abschnitt 6.2.1) benötigt das parametrische Modell sieben Parameter. Diese entsprechen den jeweiligen Dicken der Abschnitte des Biegebalkens aus Abbildung 6.2. Das Ausgangsmodell weist eine konstante Dicke von  $h_i = 8$  mm auf und der gültige Parameterraum wird von  $h_{i,min} = 4$  mm bis  $h_{i,max} = 16$  mm definiert. Hierzu werden für jede Substruktur 16 lokal reduzierte Modelle mit einer äquidistanten Abtastung von  $\Delta h_{sub} = 0.8$  mm berechnet. Die Systemmatrizen werden anschließend an 151 Stützstellen bestimmt, was einer Abtastung von  $\Delta h_{intp} = 0.08$  mm entspricht. Die Dauer der Offline-Phase, zu der die Erstellung der lokalen ROM, der Import der Matrizen in Matlab und die Interpolation selbst zählen, beträgt ca. zwei Minuten.

Für die CMS-Modelle der sieben Substrukturen wurden jeweils  $n_{cms} = 10$  Eigenmoden berücksichtigt und die Koppel-Freiheitsgrade wurden auf  $n_k = 10$  reduziert. Dadurch entsteht ein PROM in Darstellung eines Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung (5.44) mit der Dimension  $r = 80$ . Die Parametrierung und Berechnung eines diskreten ROM dauert für dieses Modell 0.2 Sekunden. Die maximale Durchbiegung für die Ausgangskonfiguration entspricht exakt dem Wert der FE-Analyse. Alle Berechnungszeiten und relativen Fehler im Vergleich zu der Referenzlösung sind in Tabelle 6.5 zusammengefasst.

### 6.2.2 Numerische Optimierung

Zur Lösung des Optimierungsproblems wurden verschiedene Verfahren verwendet. In Matlab wurde ein meta-heuristisches Verfahren, das sogenannte Simulated Annealing, implementiert und in Kombination mit dem Differenzenverfahren sowie der

entwickelten Methode zur parametrischen Modellbildung angewendet. Die numerische Vergleichslösung in ANSYS Workbench, die auf dem unreduzierten FE-Modell basiert, wurde mit einem MOGA-Algorithmus (Multi-objective Genetic Algorithm) [6] berechnet.

### **Simulated Annealing**

Meta-heuristische Verfahren setzen gezielt Zufallsvariablen bei der Suche nach einem Minimum ein. Dabei werden keine Gradienten der zu minimierenden Funktionen benötigt, allerdings mit dem Nachteil eines erhöhten Berechnungsaufwands. Der Vorteil solcher Verfahren besteht in der erhöhten Chance aus einem lokalen Minimum wieder herauszufinden und somit tatsächlich das globale Minimum zu finden. Dadurch sind sie robuster und weniger abhängig von der Wahl der Anfangswerte, wie es beispielsweise Abstiegs- oder Gradientenverfahren sind.

Die Verfahren des Simulated Annealings basieren auf der Analogie mit dem technisch physikalischen Prozess des Glühens von Metallen [102]. Beim Erstarrungsprozess von Schmelzen hängt die Güte der sich ergebenden Kristallisationszustände von der Schmelztemperatur und der Abkühlrate ab. Je höher die Anfangstemperatur und je geringer die Abkühlrate, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gewünschter Kristallisationszustand erreicht wird. Ebendies gilt beim Simulated Annealing für die numerische Minimierung einer Gütefunktion. Es wird ein Pseudotemperaturwert definiert, die bei zu schnellem Abkühlen zu unerwünschten Ergebnissen führt. Die Ausgangstemperatur und die Abkühlrate sind dabei abhängig von der Optimierungsaufgabe.

Der wesentliche Unterschied des Simulated Annealings verglichen mit den Abstiegsverfahren besteht in einer gewissen Entkommenswahrscheinlichkeit. Dies beschreibt die Möglichkeit, durch die Wahl eines Zufallswertes einen Iterationsschritt vorzunehmen, der die Gütefunktion verschlechtert. Diese Wahrscheinlichkeit ist umso größer, je höher die Pseudotemperatur ist. Aufgrund der hohen Temperatur am Anfang, verringert sich dadurch aber die Möglichkeit in der frühen Phase des Vorgehens in einem lokalen Minimum stecken zu bleiben. Am Ende des Verfahrens sinkt die Temperatur sehr langsam, was Nachteile hinsichtlich der Rechenzeiten bewirken kann.

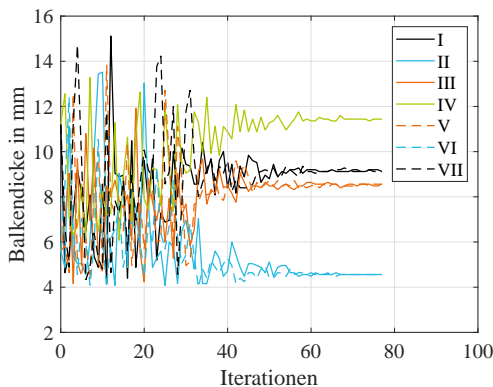
Für die vorliegende Optimierungsaufgabe wird das folgende Vorgehen gewählt:

1. Definition von Abbruchkriterien (Minimale Pseudotemperatur oder maximale Iterationen ohne Verbesserung des Funktionswertes).
2. Festlegung von Startentwürfen und Berechnung der zugehörigen Funktionswerte.
3. Generierung eines stochastischen Iterationsschritts mit zufällig gewählten Designvariablen.
4. Berechnung des Funktionswerts.

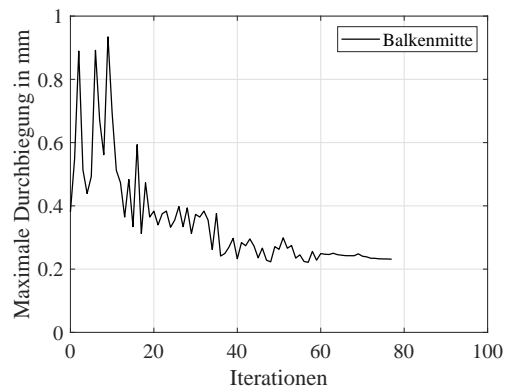
5. Akzeptieren des neuen Iterationsschritts in Abhängigkeit der aktuellen Pseudotemperatur. Je höher die Pseudotemperatur, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Iteration trotz Verschlechterung des Funktionswertes akzeptiert wird.
6. Reduktion der Pseudotemperatur.
7. Ausführung der Schritte 3.-6. solange kein Abbruchkriterium erfüllt ist.

Die Hauptbedingung oder Zielfunktion der Optimierungsaufgabe ist die Minimierung der Nachgiebigkeit des Biegebalkens. Hierzu stehen sieben Designvariablen, die jeweiligen Schalendicken der Biegebalken-Segmente zur Verfügung. Als Nebenbedingung wird eine konstante Gesamtmasse des Biegebalkens gefordert. Der Verlauf der Designvariablen über die 78 Iterationen des Simulated Annealings ist in Abbildung 6.13a dargestellt. Bis zur 30. Iteration lassen sich noch sehr große Variationen der einzelnen Parameter zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen erkennen. Danach nähern sich die Werte langsam dem Endwert an.

Für die Balkensegmente I und VII (schwarz), II und VI (blau) sowie III und V (orange) ergeben sich aus der Optimierung identische Werte. Dies entspricht der Erwartung, da aufgrund der Symmetrie des Biegebalkens in der x-y-Ebene und der mittigen Belastung ein symmetrischer Aufbau des Biegebalkens plausibel erscheint.



(a) Verlauf der Designvariablen (Dicke der Balkensegmente)



(b) Verlauf der Zielgröße (maximale Durchbiegung des Balkens)

Abbildung 6.13: Verlauf der sieben Designvariablen und der Zielgröße über den Iterationen des Simulated Annealings

Den Verlauf der maximalen Durchbiegung des Balkens und somit der Zielgröße der Minimierungsaufgabe ist in Abbildung 6.13b über die Iterationen des Simulated Annealings dargestellt. Hier lassen sich ebenfalls in den ersten Iterationen große Schwankungen im Funktionswert erkennen. Ab der 60. Iteration verändern sich sowohl die Designparameter als auch der Zielfunktionswert nur noch geringfügig. Nach 78. Iterationen und ca. 48 Minuten Berechnungszeit wurde für die optimierte Version eine maximale Durchbiegung von  $y(350 \text{ mm}) = 0.231 \text{ mm}$  ermittelt. Dies entspricht einer Verbesserung von 33 % im Vergleich zum Ausgangszustand.

## **Genetische Mehrzieloptimierung**

Als numerische Vergleichslösung wurde die Optimierung mit der gleichen Zielfunktion und identischen Nebenbedingungen ebenfalls in ANSYS Workbench durchgeführt. Die Optimierung erfolgte mit dem Modul „Goal Driven Optimization“ des ANSYS R17.2 DesignXplorers. Dieses Modul erzeugt mittels statistischer Versuchsplanung (DOE) einen Satz FE-Modelle. Diese werden im ersten Schritt gelöst. Im Anschluss wird eine Kriging-Antwortfläche erzeugt und mit einem genetischen Algorithmus zur Mehrzieloptimierung (MOGA) kombiniert.

Der detaillierte Ablauf der adaptiven Mehrzieloptimierung sieht wie folgt aus:

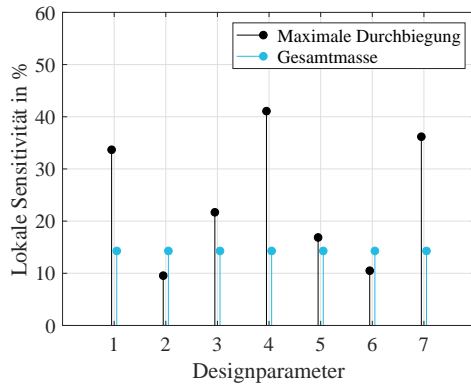
1. Generierung der ersten Population von Lösungskandidaten (Design point).
2. Lösung der Kandidaten.
3. Berechnung der Kriging-Antwortfläche.
4. Definition der nächsten Population und Bewertung des Modellfehlers für die neuen Lösungskandidaten.
5. Akzeptieren der Lösungskandidaten der aktuellen Population (weiter mit Schritt 6) oder Verbesserung der Kriging-Antwortfläche (weiter mit Schritt 3).
6. Validierung der Konvergenz des Algorithmus.
7. Ausführung der Schritte 3.-6. bis der Algorithmus konvergiert ist.

Als Optimum wird schließlich der Parametersatz mit dem geringsten Abstand zu den minimalen Zielgrößen gewählt.

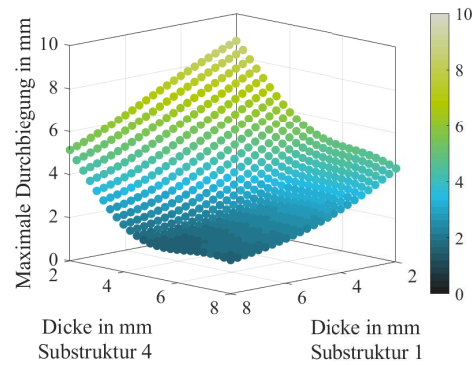
Das beschriebene Verfahren bietet den Vorteil, Zwischenergebnisse grafisch darstellen zu können und somit einen tiefgreifenden Einblick in die Zusammenhänge des Gesamtsystems zu erhalten. Ein solcher Zusammenhang ist in Abbildung 6.14a beispielhaft für die lokalen Sensitivitäten der Designparameter bezüglich der maximalen Durchbiegung und Gesamtmasse des Biegebalkens dargestellt. Die lokalen Sensitivitäten beschreiben hierbei, wie empfindlich die Funktionswerte auf kleine Änderungen von Eingangsparametern reagieren. Die Variation der Dicke der Balkensegmente wirkt sich, wie es zu erwarten war, jeweils in gleicher Weise auf die Gesamtmasse aus. Bezüglich der maximalen Durchbiegung lassen sich die Segmente I, IV und VII identifizieren, die den wesentlichen Einfluss auf die Zielgröße besitzen.

In Abbildung 6.14b ist die abgeleitete Kriging-Antwortfläche für die maximale Durchbiegung in Abhängigkeit der Balkendicke von Segment I und IV dargestellt. Diese Antwortflächen werden für alle Parameter berechnet und nachfolgend für die Auswahl der nächsten Population sowie der Bewertung des Modellfehlers genutzt.

Für den untersuchten Anwendungsfall konvergierte der Algorithmus nach der Berechnung von 1050 Lösungskandidaten, wobei für die erste Population 100 und für jede weitere Iteration 50 Kandidaten erzeugt wurden. Die Gesamtdauer der Optimierung betrug ca. 4 Stunden 25 Minuten und lieferte eine Konfiguration des Biegebalkens mit einer maximalen Durchbiegung von  $y(350\text{ mm}) = 0.250\text{ mm}$ . Dies entspricht einer Verbesserung von 27 % im Vergleich zum Ausgangszustand.



(a) Lokale Sensitivitäten der Designparameter bezüglich maximaler Durchbiegung und Gesamtmasse des Biegebalkens



(b) 3D-Darstellung der abgeleiteten Antwortfläche für die maximale Durchbiegung in Abhängigkeit zwei beispielhaft gewählter Designparameter

Abbildung 6.14: Zwischenergebnisse der FE-Optimierung mittels ANSYS Workbench

### 6.2.3 Bewertung und Diskussion der numerischen Untersuchungen

Neben den bereits vorgestellten Optimierungen auf Basis der ordnungsreduzierten und vollen FE-Modelle, wurde das analytische Referenzmodell des Differenzenverfahrens kombiniert mit dem Simulated Annealing-Algorithmus ebenfalls für eine Optimierung genutzt. Die Ergebnisse der drei Optimierungsverfahren sowie die statische Verformung des Ausgangsmodells sind in Abbildung 6.15 dargestellt.

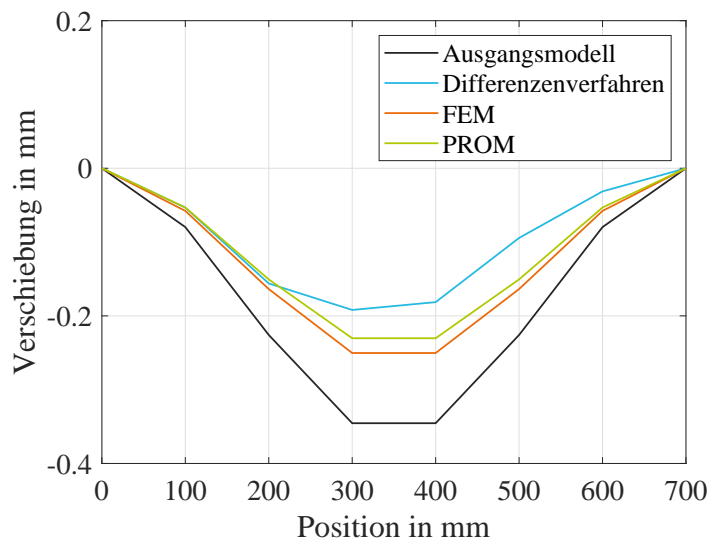


Abbildung 6.15: Statische Verformung des Biegebalkens für verschiedene optimierte Lösungen im Vergleich zu dem Ausgangsmodell

Alle drei optimierten Lösungen konnten eine Verbesserung der statischen Steifigkeit des beidseitig eingespannten Biegebalkens erreichen. Die beste Lösung mit

minimaler Durchbiegung wurde mittels Modellen aus dem Differenzenverfahren erzielt. Hierbei wurde der Maximalwert um 44 % reduziert. Die in dieser Arbeit vorgestellten parametrischen Modelle in Verbindung mit einem geeigneten meta-heuristischen Optimierungsverfahren konnten die maximale Durchbiegung um 33 % verringern. Die numerische Vergleichslösung (vgl. Abschnitt 6.2.2) schnitt mit einer Reduktion von 27 % am schlechtesten ab. Zudem wurde die Nebenbedingung nicht eingehalten und die Gesamtmasse des Biegebalkens durch die Variation der Balkendicken unzulässig erhöht. Die Zielgrößen und Nebenbedingungen sind in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

Tabelle 6.3: Ergebnisse der Optimierung

	Maximale Durchbiegung	Gewicht
Ausgangsmodell	0.345 mm	2.64 kg
Differenzenverfahren	0.192 mm (−44 %)	2.64 kg (±0 %)
FEM	0.250 mm (−27 %)	2.74 kg (+4 %)
PROM	0.231 mm (−33 %)	2.64 kg (±0 %)

Die resultierenden Werte der optimierten Designvariablen sind in Tabelle 6.4 aufgelistet. Es lässt sich erkennen, dass die sensitiven Parameter (vgl. Abbildung 6.14a) erwartungsgemäß die höchsten Werte aufweisen.

Tabelle 6.4: Resultierende Werte der Designvariablen nach der Optimierung

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Ausgang	8 mm	8 mm	8 mm	8 mm	8 mm	8 mm	8 mm
Diff.-Verf.	10.6 mm	4 mm	8.7 mm	9.5 mm	8.1 mm	4 mm	11.1 mm
FEM	10.5 mm	5.2 mm	8.6 mm	10.3 mm	8.1 mm	5.4 mm	9.8 mm
PROM	9.1 mm	4.6 mm	8.6 mm	11.4 mm	8.6 mm	4.6 mm	9.1 mm

Neben den Optimierungsergebnissen wird im Hinblick auf eine spätere Nutzung der Modelle in Echtzeit-Anwendungen ebenfalls die Effizienz der Berechnung untersucht. Die Berechnungszeiten und dazugehörigen relativen Fehler der Berechnungsergebnisse bezüglich der analytischen Referenzlösung (vgl. Abschnitt 6.2.1) sind in Tabelle 6.5 zusammengefasst. Im Vergleich zu der Optimierung mit vollen FE-Modellen konnte die Optimierung mit PROM in ca. 18 % der Zeit durchgeführt werden. Eine einzelne statische Analyse dauert dabei nur ca. 1 % der ursprünglichen Zeit. Die relativen Fehler bezüglich der Referenzlösung liegen für beide Verfahren in der gleichen Größenordnung.

Durch die erhöhte Recheneffizienz der PROM wird es möglich anderweitige, heutzutage selten für strukturmechanischen Optimierungen verwendete Verfahren nutzbar zu machen. Ein solches Verfahren stellt beispielsweise das Simulated Annealing dar. Insbesondere am Ende des Verfahrens, wenn die Pseudotemperatur sehr langsam sinkt, kann es zu erhöhten Rechenzeiten kommen. In Kombination mit unreduzierten FE-Modellen ist dieses Vorgehen in der Phase der Konzeptfindung häufig unwirtschaftlich. Durch die Nutzung von effizienten Modellen können die beschriebenen

Tabelle 6.5: Berechnungszeiten und relativer Fehler der Berechnungsergebnisse

	Diff.-Verf.	FEM	PROM
Dauer Modellerstellung	-	-	120 s
Dauer Statische Analyse	< 0.1 s	15 s	0.2 s
Dauer Optimierung	30 s	4 h 25 min	47min 45 s
Relativer Fehler	4 %	2 %	2 %

Nachteile jedoch abgefangen werden. Die Ergebnisse in Tabelle 6.3 zeigen, dass das entwickelte Verfahren zur Modellbildung parametrischer Modelle bestens zur Strukturoptimierung sowie zur Bewertung von Konzepten und prinzipiellen Lösungsansätzen geeignet ist.

Abschließend wurden die optimierten Werte zur Probe in das FOM eingesetzt. Die Abbildung 6.16 zeigt die statische Verformung des Biegebalkens mit den finalen Designvariablen (PROM). Das Ergebnis der FE-Analyse mit Parametern aus der Optimierung mit PROM zeigt im Vergleich zur Lösung mit dem ordnungsreduzierten Modell eine geringfügig höhere maximale Durchbiegung in der Balkenmitte. Die Abweichungen ergeben sich aufgrund des Fehlers, der bei der Interpolation der lokalen ROM auftritt. Durch die Wahl einer kleineren Abtastung  $\Delta h_{sub}$  kann bei Bedarf der Fehler zwischen PROM und FOM reduziert werden. Das Resultat der Optimierung mit PROM ist jedoch weiterhin besser als die optimierte Variante unter Verwendung des vollen FE-Modells. Zudem werden die Nebenbedingungen eingehalten und die Rechenzeit deutlich verringert.

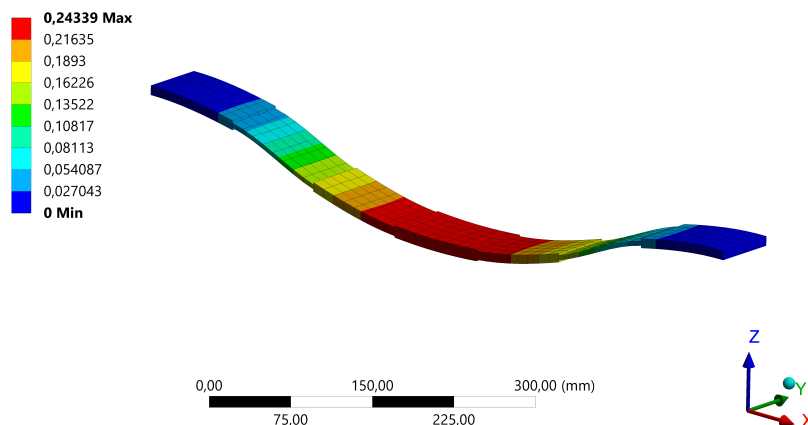


Abbildung 6.16: Statische Verformung des Biegebalkens aus der FE-Analyse mit Parametern aus der Optimierung mit PROM

## 6.3 Experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme vorgestellt und die Leistungsfähigkeit anhand eines numerischen Anwendungsfalls untersucht. Der Fokus der Anwendung lag dabei auf der Konzeptfindung und der Optimierung. Als integraler Teil der modellbasierten Entwicklung sollen die entwickelten Methoden und Modelle ebenfalls in der Validierungsphase genutzt werden können. Das Anwendungsziel der Modelle soll die systematische Untersuchung und Bewertung konstruktiver Parameter in einer variablen hybriden (numerischen und experimentellen) Entwicklungsumgebung sein.

Die Bewertung der Leistungsfähigkeit der parametrischen ordnungsreduzierten Modelle soll im Folgenden damit abgeschlossen werden, dass die Umsetzbarkeit des erarbeiteten Ansatzes anhand eines Laborversuches nachgewiesen wird. Der Schwerpunkt der experimentellen Validierung liegt dabei auf dem Nachweis der Echtzeitfähigkeit und Parametrierbarkeit der Modelle zur Laufzeit. Für den Laborversuch wird der in Abschnitt 6.1 vorgestellte beidseitig eingespannte Biegebalken genutzt.

### 6.3.1 Versuchsaufbau

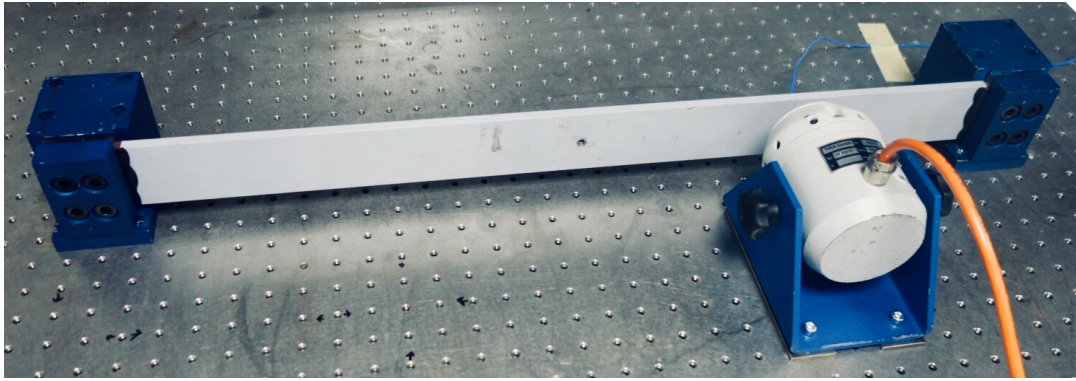
Für die experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells wird der in Abbildung 6.17a dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Der Aufbau besteht im Wesentlichen aus einem Echtzeitsystem inklusive Anti-Aliasing- sowie Rekonstruktionsfilter, einem Signalverstärker, einem elektrodynamischen Shaker, der dynamischen Balkenstruktur sowie einem Beschleunigungsaufnehmer. Der beidseitig eingespannte Balken stellt dabei das nachzubildende physische System dar. Um eine möglichst definierte feste Einspannung zu realisieren, ist der Balken an seinen Enden mit zwei Einspannungsblöcken (Abbildung 6.17b) und diese wiederum mit dem Labortisch verschraubt. Die Anregungskräfte und Beschleunigungen am Balken werden senkrecht zur Balkenlänge und -breite eingeleitet bzw. gemessen.

Die Generierung der Anregungssignale, die Steuerung des Versuchsablaufes und die Auswertung der Messsignale erfolgt digital in Echtzeit auf einem dSpace-System (DS1006) mit einem integrierten Analog-Digital-Wandler (DS2003 A/D-Karte, 32 Kanäle, 16 Bit) sowie einem Digital-Analog-Wandler (DS2103 D/A-Karte, 32 Kanäle, 14 Bit). Eine schematische Darstellung des Versuchsaufbaus ist in Abbildung 6.18 gegeben. Für die Validierung des Modells wird der Biegebalken mit einer geregelten Kraft angeregt. Das selbe Signal wird sowohl in das Echtzeitmodell als auch in das physikalisch vorhandene System eingespeist. So kann sichergestellt werden, dass die numerische Simulation und der experimentelle Aufbau dieselben Eingangsdaten besitzen. Die resultierende Beschleunigung am Balken wird kolloziert an der Position A ( $x = 480 \text{ mm}$ ) gemessen.

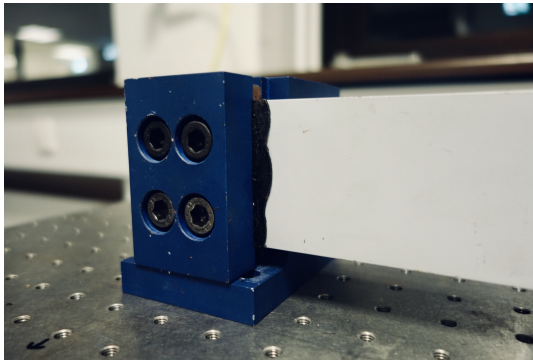
Die experimentellen Untersuchungen wurden an zwei unterschiedlichen Konfigurationen des Biegebalkens durchgeführt. Die erste Konfiguration entspricht dem bereits



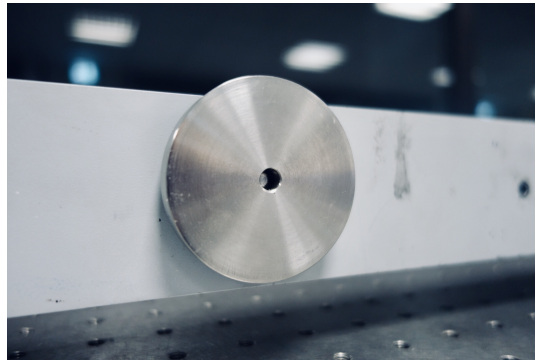
### 6.3 Experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells



(a) Beidseitig eingespannter Biegebalken



(b) Einspannung



(c) Zusatzmasse

Abbildung 6.17: Versuchsaufbau

vorgestellten unveränderten Ausgangssystem. Durch Anbringen einer zusätzlichen Masse an Position  $B$  ( $x = 300$  mm) kann das dynamische Verhalten verändert und eine zweite Konfiguration erzeugt werden. Die Zusatzmasse ( $m_z = 0.3$  kg) wird durch einen magnetischen Sockel mit der Grundstruktur verbunden (Abbildung 6.17c). Somit kann während des Versuchs zwischen den Konfigurationen geschaltet werden.

Das gemessene Übertragungsverhalten von Kraft zu Beschleunigung an Position  $x = 480$  mm mit und ohne zusätzlicher Masse ist in Abbildung 6.19 dargestellt. Der gemessene Frequenzgang ohne Zusatzmasse besitzt Extrema bei 81.3 Hz, 215 Hz und 437.5 Hz. Die Massenänderung bewirkt ein Verschieben der Eigenfrequenzen. Für die veränderte Konfiguration des Biegebalkens lassen sich aus der experimentellen Analyse die Werte 76.6 Hz, 223.8 Hz und 444.2 Hz ablesen.

#### 6.3.2 Parametrisches Balkenmodell

Mit den in Kapitel 5 vorgestellten Methoden der Modellreduktion wurde aus dem FE-Modell des Biegebalkens ein echtzeitfähiges Simulationsmodell abgeleitet. Das parametrische Modell besitzt 35 Parameter. Diese entsprechen jeweils dem Elastizitätsmodul, der Dichte, den Rayleigh-Dämpfungsbeiwerten und den Dicken der Abschnitte des Biegebalkens aus Abbildung 6.2. Die Ausgangswerte und gültigen

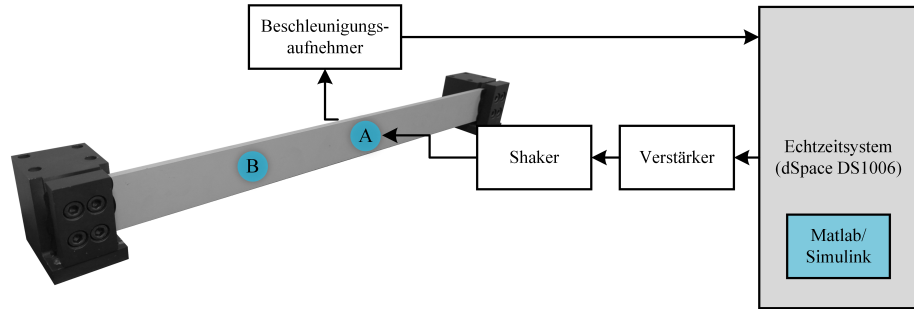


Abbildung 6.18: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Parameterräume entsprechen denen aus Abschnitt 6.1.

Für die CMS-Modelle der sieben Substrukturen wurden jeweils  $n_{cms} = 4$  Eigenmoden berücksichtigt und die Koppel-Freiheitsgrade wurden auf  $n_k = 2$  reduziert. Dadurch entsteht ein PROM in Darstellung eines Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung (5.44) mit der Dimension  $r = 40$ . Die Parametrierung und Berechnung eines diskreten ROM mit aktualisierten Parametern dauert für dieses Modell 0.1 Sekunden. Die zugrundeliegende Zeitbereichssimulation, schematisch dargestellt in Abbildung 6.20 wird mit Hilfe von Matlab/Simulink berechnet. Die Werkzeugkette besteht aus ANSYS R17.2, Matlab R2013a und dSPACE Release 2013-A.

Aufgrund der zeitvarianten Systemmatrizen des parametrischen Modells wurde der erweiterte Simulink-Block eines Zustandsraummodells, vorgestellt in Abschnitt 5.2.5, verwendet. Die aktuell gültigen Matrizen werden in einer eingebetteten Matlab-Funktion zur Laufzeit des Simulink-Modells berechnet und gemäß Blockschaltdiagramm in Abbildung 6.20 integriert. Für den Aufbau des neuen Zustandsraummodells sind nur Matrixmultiplikationen notwendig, was eine effiziente Lösung des Systems begünstigt.

Für die Zeitbereichssimulation gemäß Abbildung 6.20 muss ein echtzeitfähiges Modell des Biegebalkens vorhanden sein. Dabei sollen Modellzeit und Echtzeit in jedem Zeitschritt synchron laufen. Die Echtzeitforderung wird erfüllt, wenn die Durchlaufzeit  $t_l$  eines Zeitschritts der Simulation kleiner als das Abtastintervall  $t_s$  ist. Dieses Kriterium wird anhand des Echtzeitkoeffizienten

$$r_{rt} = \frac{t_s}{t_l} \quad (6.3)$$

bewertet und gilt für Werte größer als eins als erfüllt. Die Durchlaufzeit  $t_l$  wird vom Echtzeitsystem zur Verfügung gestellt und hängt von der Modellgröße, dem verwendeten Gleichungslöser und der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Hardware ab. Der mittlere Echtzeitkoeffizient beträgt für die untersuchte Anwendung  $\bar{r}_{rt} \geq 3$ .

### 6.3 Experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells

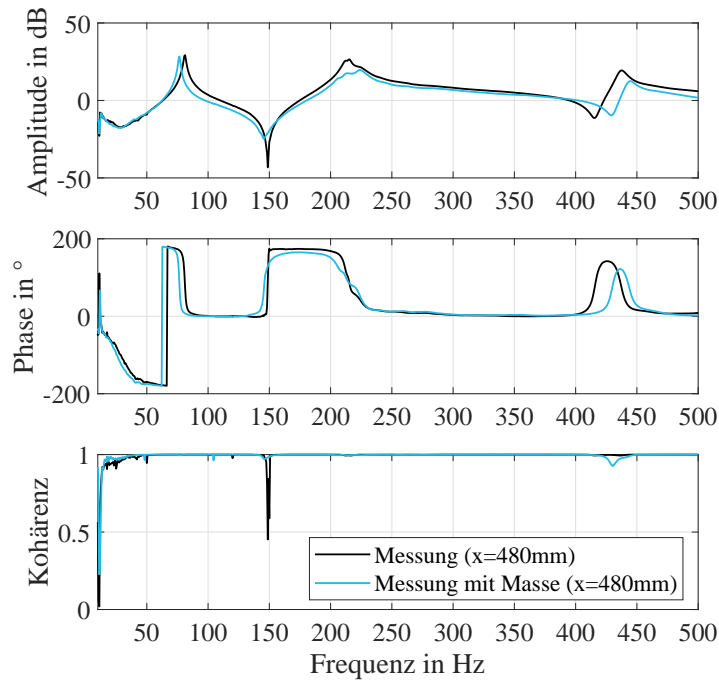


Abbildung 6.19: Gegenüberstellung des gemessenen Übertragungsverhalten von Kraft zu Beschleunigung an Position  $x = 480$  mm mit und ohne zusätzliche Masse

#### 6.3.3 Modellabgleich und Modellaktualisierung

Zur Validierung von numerischen Modellen werden häufig experimentell ermittelte Daten verwendet. Zunächst muss dabei die Modellstruktur hinsichtlich vorgenommener Idealisierungen überprüft und gegebenenfalls angepasst werden. Im vorliegenden Fall wurde ein einfaches System betrachtet und die etablierte Finite-Elemente-Methode zur Modellbildung genutzt. Somit wird angenommen und im Weiteren vorausgesetzt, dass die Abweichungen zwischen Versuch und Modell durch Anpassungen geeigneter physikalischer Parameter durchgeführt werden können.

Da selbst in diesem einfachen Anwendungsbeispiel eine Vielzahl von Parametern

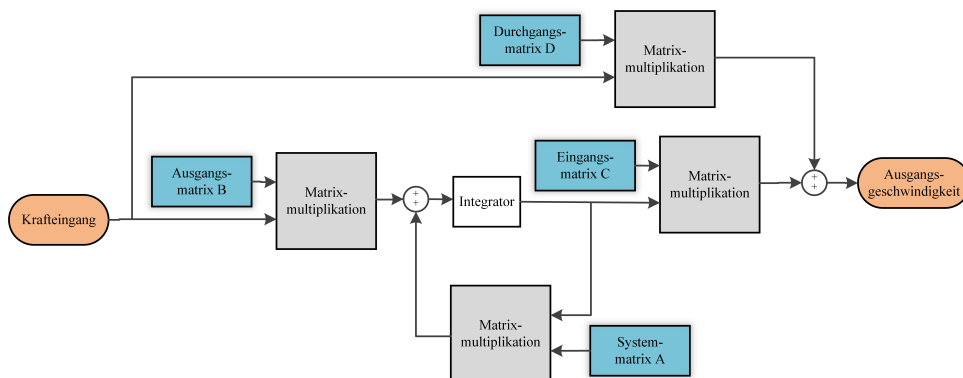


Abbildung 6.20: Zeitbereichssimulation in Simulink

zu berücksichtigen sind, besteht die Notwendigkeit zur automatisierten und computer-gestützten Modellanpassung. Die parallel zum Versuch laufende Echtzeit-Simulation erfordert eine ständige Aktualisierung des Simulationsmodells. Nach der Detektion einer Zustandsänderung muss daraufhin ein zeitnahes Modellupdate erfolgen. Im Folgenden wird die Verwendung des entwickelten parametrischen Strukturmodells vorgestellt, mit dem ein gezielter Abgleich erfolgen kann.

Um die Auswahl der Parameter zu erleichtern und die Einflussmöglichkeiten im Vorhinein abzuschätzen, wurde eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Hierdurch werden die effektivsten Modellparameter identifiziert, die bei einer Änderung eine größtmögliche Auswirkung auf das Systemverhalten zeigen. Diese Analyse liefert dabei jedoch keinen Hinweis auf eine mögliche physikalische Bedeutsamkeit. Durch eine stärkere Gewichtung der sensitiven Parameter im späteren Modellabgleich wird allerdings eine Beschleunigung des Verfahrens erwartet.

Das gewählte Versuchsszenario lässt sich in drei Zeitabschnitte unterteilen. Die Abschnitte sind in Abbildung 6.21 mit den römischen Zahlen I, II und III gekennzeichnet. Vor der eigentlichen Validierung des parametrischen Strukturmodells wird der Versuch gestartet und der Balken durch eine harmonische Krafterregung zu Schwingungen angeregt. Die Anregungsfrequenz beträgt 80 Hz.

Im oberen Teil der Darstellung sind die experimentell erfassten Beschleunigungen am Biegebalken im Zeitbereich aufgetragen. Im Vergleich dazu sind unten die simulierten Zeitdaten dargestellt.

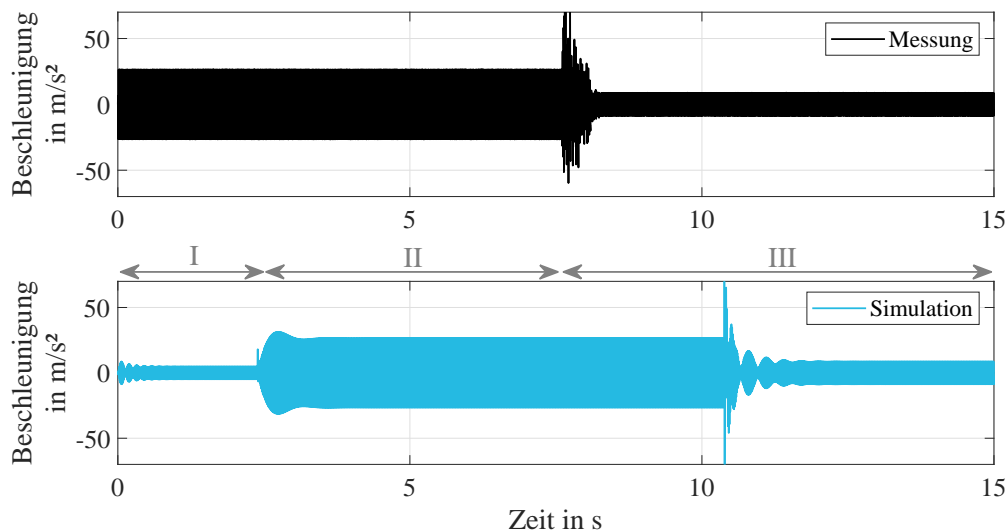


Abbildung 6.21: Gegenüberstellung der gemessenen und simulierten Beschleunigung im Zeitbereich

In Abbildung 6.22 sind zudem die gemessenen und simulierten Beschleunigungen im Zeitbereich als Detailansichten der Abschnitte I, II und III gegenübergestellt.

Der Versuchsabschnitt I beginnt mit der Inbetriebnahme des parametrischen Strukturmodells. Aufgrund der sprunghaften Änderung der Anregung kommt es zunächst zu einem Einschwingvorgang. Sobald die freien Schwingungen abgeklungen

### 6.3 Experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells

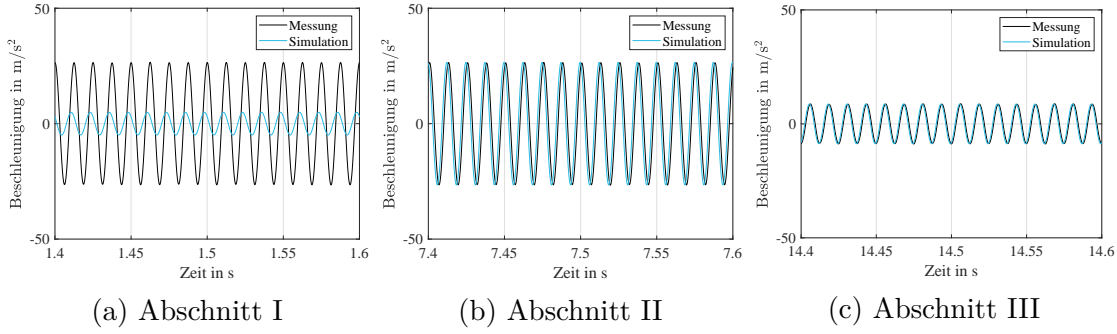


Abbildung 6.22: Gegenüberstellung der gemessenen und simulierten Beschleunigung im Zeitbereich

sind, wird eine erste Parameteranpassung durchgeführt. Abbildung 6.22a zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigungen in dieser Phase des Versuchs. Der Modellabgleich erfolgt hierbei in zwei Schritten. Zunächst werden die Abweichungen zwischen gemessener und numerisch berechneter Amplitude und Phase der Schwingungen minimiert. Hierzu werden die physikalischen Parameter Elastizitätsmodul, Dichte und Schalendicke optimiert. Das mathematische Optimierungsproblem wird mit

$$\min_{\mathbf{p} \in P} e(\mathbf{p}) \quad | \quad P \subset \mathbb{R} \quad (6.4)$$

beschrieben. Dabei wird die Funktion  $e$  zur Berechnung des relativen Fehlers zwischen dem gemessenen und dem simulierten Frequenzgang wie folgt definiert:

$$e(\mathbf{p}) = \left( \frac{\varphi_{sim}(\mathbf{p}) - \varphi_{mess}}{\varphi_{mess}} + \frac{|H_{sim}(\mathbf{p})| - |H_{mess}|}{|H_{mess}|} \right) \times 100 \%, \quad (6.5)$$

mit der Matrix  $\mathbf{p}$ , die alle Designvariablen  $[E^s, \rho^s, h^s]$  der Substrukturen  $s$  beinhaltet, der Amplitude  $|H|$  und der Phase  $\varphi$  der Frequenzantwort.

Dabei wird durch die stärkere Gewichtung besonders sensibler Parameter eine schnellere und effizientere Anpassung ermöglicht. Zur Optimierung wird das Simulated-Annealing-Verfahren mit geringer Starttemperatur  $T_{start} = 10^{-4}$  und relativ hoher Minimal-Temperatur  $T_{min} = 10^{-5}$  genutzt. Die Pseudotemperaturen können prozessbegleitend adaptiv angepasst werden, sofern keine geeignete Lösung gefunden wird. Ein geringer Temperaturbereich bzw. eine hohe Abkühlrate führen zu einer schnellen Näherungslösung, wobei unter Umständen eine ungünstigere Zwischenlösung final akzeptiert wird. Im zweiten Schritt werden abschließend die Dämpfungsbeiwerte berechnet. Unter Verwendung der beschriebenen Methoden und Einstellungen ist nach ca. zwei Sekunden ein geeignetes Parameterset gefunden.

Der nächste Abschnitt startet mit der Aktualisierung der Systemmatrizen. Auch hier ist zunächst ein Einschwingvorgang zu beobachten. Im Anschluss stimmt das berechnete und das gemessene Signal sehr gut überein. Ein geringfügiger Fehler in der Phase kann durch den Algorithmus nicht ausgeglichen werden. Abschnitt II endet

mit der Änderung des dynamischen Verhaltens der physikalischen Balkenstruktur. Durch Anbringen der zusätzlichen Masse an Position  $x = 300$  mm werden die Eigenfrequenzen, wie in Absatz 6.3.1 beschrieben, signifikant verschoben.

In Abschnitt III wird der Anstieg des Fehlers zwischen Messung und Simulation festgestellt und eine erneute Anpassung der physikalischen Parameter durchgeführt. Das Vorgehen ist dabei zu Abschnitt I identisch. Nach ca. drei Sekunden ist in diesem Fall ein neues geeignetes Parameterset berechnet und nach sechs Sekunden stimmen Messsignal und berechnetes Signal erneut gut überein (Abbildung 6.22c).

Die berechneten Materialparameter der einzelnen Substrukturen des Biegebalkens am Beispiel der Dichte sind in Abbildung 6.23 dargestellt. Vor der Massenänderung sind die Dichten der Balkensegmente nahezu unverändert identisch und liegen im Bereich der Ausgangskonfiguration von  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Nach der Massenänderung ergeben sich erhöhte Werte für die Segmente V und VI. Dies bewirkt eine Erhöhung der Gesamtmasse von 2.64 kg auf 2.97 kg und entspricht einer simulativ identifizierten Zusatzmasse von 0.33 kg. Im Vergleich zu der tatsächlichen Änderung am physischen System ist der identifizierte Wert circa 10 % zu hoch.

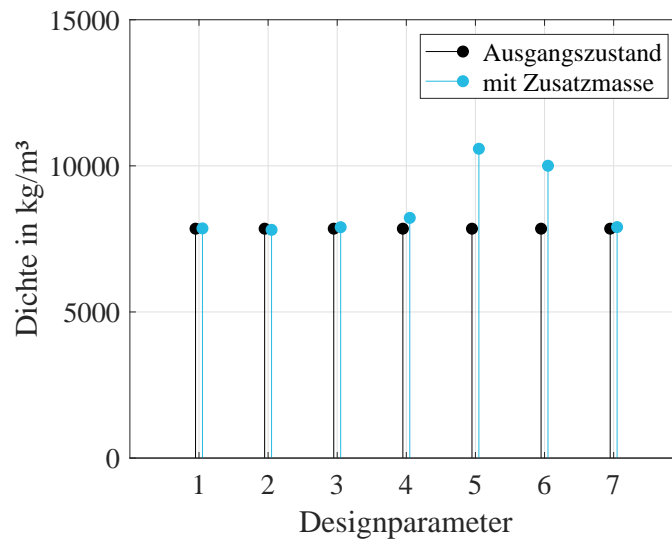


Abbildung 6.23: Materialparameter Dichte der einzelnen Substrukturen des Biegebalkens vor und nach der Massenänderung

Abschließend sind in den Abbildungen 6.24 und 6.25 die aktualisierten Übertragungsfunktionen von Kraft zu Beschleunigung an Position  $x = 480$  mm dargestellt. Die Frequenzgänge stimmen bis 300 Hz gut überein. Insbesondere der Amplitudengang im Bereich der ersten beiden Eigenfrequenzen wird sehr gut approximiert. Der Phasengang weist in den Eigenfrequenzen und vor allem in den Nullstellen des Frequenzgangs deutlich sichtbare Abweichungen auf. Diese Beobachtung deckt sich mit den Ergebnissen im Zeitbereich, bei denen ebenfalls die Phase nicht optimal abgeglichen werden konnte.

Der Vergleich der  $H_2$ -Norm zeigt eine ebenso gute Übereinstimmung. Der Fehler zwischen gemessenen und berechneten Signalen liegt bei 1.3 % bis 6 %.



### 6.3 Experimentelle Validierung des parametrischen Strukturmodells

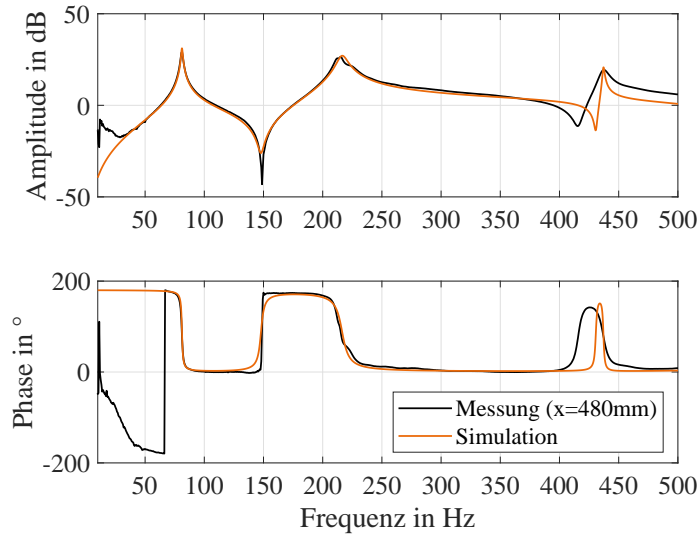


Abbildung 6.24: Gegenüberstellung des gemessenen und simulierten Übertragungsverhalten von Kraft zu Beschleunigung an Position  $x = 480$  mm

Tabelle 6.6: Vergleich der  $H_2$ -Normen zwischen gemessenem und berechnetem Frequenzgang an Position  $x = 480$  mm

	Ohne Zusatzmasse	Mit Zusatzmasse
Messung	121.1	66.9
Simulation	119.6 (−1.3 %)	62.9 (−6.0 %)

#### 6.3.4 Bewertung und Diskussion der experimentellen Validierung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Modellvalidierung mittels experimenteller Analysen und einem parallel laufenden virtuellen Modell untersucht. Die Validierung und Parameteranpassung erfolgte anhand zweier unterschiedlicher Konfigurationen des Biegebalkens. Das Ziel war die Integration eines echtzeitfähigen parametrischen Modells einer mechanischen Struktur in eine experimentelle Versuchsumgebung. Dabei sollen konstruktive Parameter in einer variablen hybriden Entwicklungsumgebung systematisch untersucht, bewertet und angepasst werden.

Das Vorgehen wurde anhand eines einfachen mechanischen Systems erprobt. Hierbei konnte der Ansatz zur Modellanpassung eine hohe Korrelation zwischen numerischen und experimentell ermittelten Daten erzielen. Im Vergleich zum Ausgangszustand konnten die Abweichungen im Frequenzgang bis 300 Hz erheblich reduziert werden. Die zusätzliche angebrachte Masse konnte bezüglich ihrer Anbindestelle identifiziert werden und die Größenordnung der Veränderung konnte abgeschätzt werden.

Die vorgenommenen Parameteränderungen sind dabei nicht notwendigerweise physikalisch korrekt. Eine entsprechende Abschätzung wird durch das untersuchte Verfahren nicht ermöglicht. Vielmehr werden die neuen Parameter so gewählt, dass

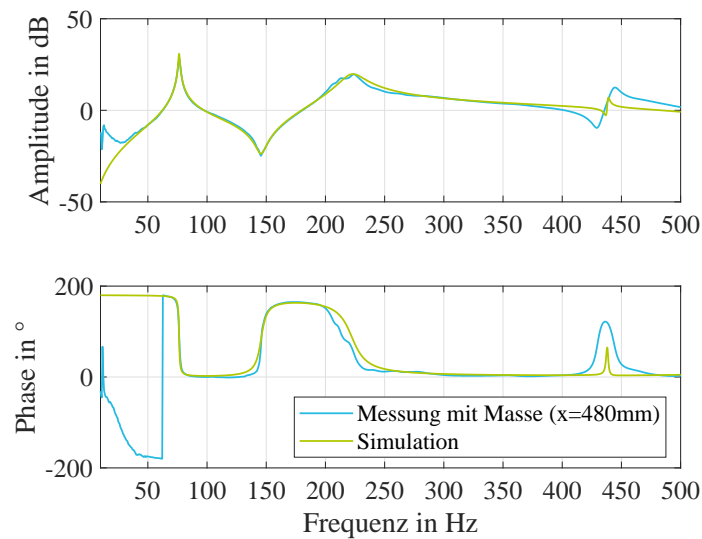


Abbildung 6.25: Gegenüberstellung des gemessenen und simulierten Übertragungsverhalten von Kraft zu Beschleunigung an Position  $x = 480$  mm mit zusätzlicher Masse

die Abweichungen zwischen Experiment und Modell lediglich aus mathematischer Sicht möglichst zeitnah reduziert werden. Ob eine Parameteränderungen zulässig ist, muss im Nachgang für jeden Anwendungsfall einzeln entschieden werden. Dies gilt insbesondere für Parameter, die beispielsweise das dynamische Verhalten und gleichzeitig die statische Nachgiebigkeit beeinflussen (vgl. Abschnitt 5.3). Im vorliegenden Fall trifft dies auf Dickenänderungen der Balkensegmente zu.



# Kapitel 7

## Anwendung und Bewertung der entwickelten Methode

In dieser Arbeit wurde eine Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme entwickelt und anhand von numerischen Untersuchungen erprobt. Zudem wurde die Leistungsfähigkeit der parametrischen Modelle in einem Laborversuch validiert. Im folgenden Kapitel soll das entwickelte Vorgehen auf komplexere, industriennahe Anwendungen übertragen werden. Zunächst wird die Auslegung und Optimierung einer Fahrzeugkomponente und anschließend die Anwendung in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung betrachtet.

### 7.1 Strukturdynamische Analyse und Optimierung eines Federbeindoms

#### 7.1.1 Ausgangsmodell und Randbedingungen

Die stetig steigende Systemkomplexität unter anspruchsvollen wirtschaftlichen und ökologischen Rahmenbedingungen stellt eine maßgebliche Herausforderung im modernen Fahrzeugbau dar. Dabei spielen Leichtbaulösungen auf Komponenten- und insbesondere Systemebene eine immer wichtigere Rolle. Im Rahmen des EU-Projekts Alliance (AffordabLe LIghtweight Automobiles AlliaNCE, Förderkennzeichen GA Nr. 723893) wurde ein Konzept zur Identifikation und Evaluation von Leichtbaupotentialen aufgezeigt und an realen Fahrzeug-Komponenten umgesetzt.

Insbesondere bei der Gestaltung von effizienten und nachhaltigen Fahrzeugkonzepten nimmt die Bedeutung des Leichtbaus stetig zu. Neben weiteren Aspekten führt die Zunahme der Werkstoffvielfalt dazu, dass der Auswahlprozess für die optimale Leichtbautechnologie einer sehr hohen Komplexität unterliegt. Dabei werden neben dem Leichtbaupotenzial auch die Kosten, der Umwelteinfluss über den gesamten Lebenszyklus sowie die zugehörige Technologieunsicherheit betrachtet. Zur Umsetzung eines effizienten und objektiven Auswahlprozesses werden daher geeignete Werkzeuge und Methoden benötigt, die innovative Lösungsansätze bereits in der Konzeptfin-

dung bewerten. In diesem Kontext wird im Folgenden die Leistungsfähigkeit der entwickelten parametrischen ordnungsreduzierten Modelle diskutiert.

Als Ausgangszustand des Entwicklungsprozesses dient der Federbeindom samt Anbauteilen eines Serienfahrzeugs aus dem Modelljahr 2016 (Abbildung 7.1). Die Komponenten des Referenz-Federbeindoms bestehen dabei vollständig aus Stahlblechen ( $E = 210$  GPa,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ).

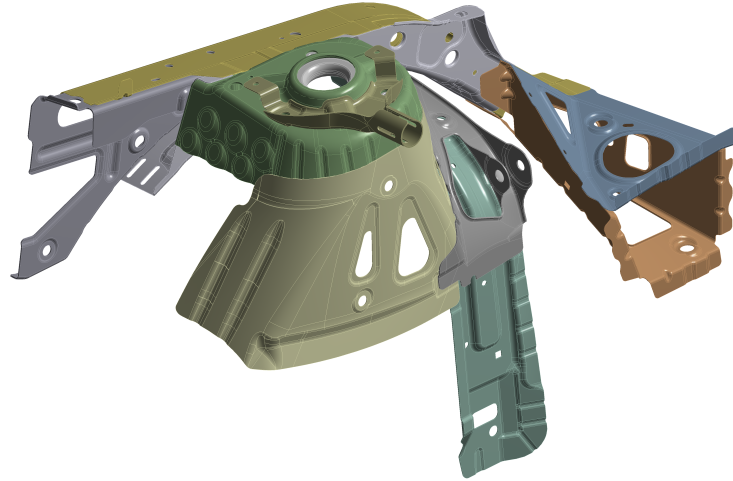


Abbildung 7.1: Ausgangsmodell des Federbeindoms aus einem Serienfahrzeug

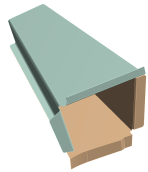

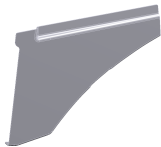
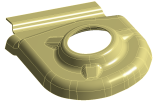
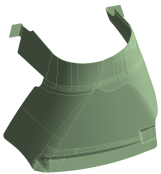
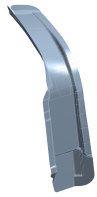
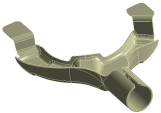
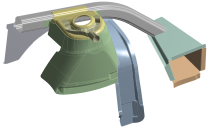
Zunächst wurden einige Geometrievereinfachungen am CAD-Modell des Serien-Designs durchgeführt. Unerwünschte Geometrien, die erwartungsgemäß keinen relevanten Einfluss auf die statischen und dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems besitzen, wurden entfernt. Sofern möglich, wurden zudem Volumenkörper durch Mittelflächenmodelle ersetzt. Hieraus ergeben sich Vorteile für die strukturmechanische Optimierung, da somit die Schalendicke einer Substruktur als Designvariable genutzt werden kann. Ein Überblick über die resultierenden Komponenten des vereinfachten Modells des Federbeindoms wird in Tabelle 7.1 gegeben.

Neben der Anzahl der Freiheitsgrade des FOM sind zudem die Anzahl der Eigenfrequenzen bis 500 Hz gelistet. Dieser Wert bestimmt maßgeblich die Anzahl der CMS-Eigenmoden, die das parametrische lokale ROM der einzelnen Komponente mindestens beinhalten muss, um die Dynamik in diesem Frequenzbereich hinreichend abbilden zu können. Um die Approximationsgüte zu erhöhen, sollten bei hoher Modendichte weitere Eigenmoden berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit wurden alle Moden bis 700 Hz einbezogen.

Für die sieben Komponenten des Federbeindom-Gesamtsystems wurden gemäß Abschnitt 5.2.1 ordnungsreduzierte Modelle mit den in Tabelle 7.1 angegebenen Anzahl von Freiheitsgraden erzeugt. Für die Komponenten I, II, III, V und VI wurden zudem lokal interpolierbare Mittelflächenmodelle mit jeweils einem Stützstellen-Abstand von  $\mu = 0.1$  aufgebaut. Die Koppel-Freiheitsgrade wurden aufgrund der Anzahl der Komponenten und der entsprechenden Schnittstellen durch die Berechnung

## 7.1 Strukturdynamische Analyse und Optimierung eines Federbeindoms

Tabelle 7.1: Überblick Komponenten des vereinfachten Federbeindoms

Nr.	Komponente	Anzahl der Freiheitsgrade (FOM)	Anzahl der Eigenfrequenzen <500 Hz (FOM)	Anzahl der Freiheitsgrade (Lokales ROM)
I		114906	6	10
II		205002	4	6
III		34230	4	6
IV		56199	1	3
V		107148	12	20
VI		74142	6	10
VII		93978	3	5
		685605	10	60

von ordnungsreduzierten Koordinaten, welche die Zwangsdeformationen an den Koppelstellen der Substrukturen abbilden, vermindert. Hierzu wurde, wie in Abschnitt 5.2.4 beschrieben, die Methode des Balancierten Abschneiden verwendet. Somit wurde sichergestellt, dass die Zustände mit dem höchsten Energieübertrag von den Ein- zu den Ausgängen des Systems beibehalten wurden. Ein Überblick über die Schnittstellen zwischen den einzelnen Komponenten des vereinfachten Federbeindoms wird in Tabelle 7.2 gegeben.

Tabelle 7.2: Überblick Schnittstellen zwischen den einzelnen Komponenten des vereinfachten Federbeindoms

Schnittstelle	Anzahl der Koppel-Freiheitsgrade (FOM)	Anzahl der Koppel-Freiheitsgrade (Lokales ROM)
I - II	72	1
II - III	213	2
II - IV	345	2
II - V	88	1
II - VI	130	1
IV - V	457	2
IV - VII	646	2
V - VI	276	1

Durch die Anwendung des entwickelten Verfahrens zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme wurde das initiale FE-Modell des Federbeindoms von 685605 Freiheitsgraden auf 73 reduzierte Freiheitsgrade vermindert. Dies entspricht einer Reduktion der Freiheitsgrade auf kleiner 0.02 %. Der Vergleich der Berechnungszeiten für eine Modal- (MA) und eine Frequenzganganalyse (FRF) für das FE-Modell der Serie, das vereinfachte FE-Modell sowie das parametrisch ordnungsreduzierte Modell des Federbeindoms ist in Tabelle 7.3 aufgeführt. Für das PROM lässt sich eine erhebliche Steigerung der Recheneffizienz erzielen.

Tabelle 7.3: Vergleich der Berechnungszeiten für die Modalanalyse und das Übertragungsverhalten am Federbeindom für verschiedene FOM und PROM

Modell	Freiheitsgrade	Rechenzeit MA	Rechenzeit FRF
FE-Modell Serie	411364	7 min 8 s	11 min 22 s
Vereinfachtes FE-Modell	231732	2 min 57 s	6 min 22 s
PROM	73	3 s	7 s

Die Übereinstimmung des PROM mit dem FOM ist anhand der Verläufe der berechneten Eigenfrequenzen in Abbildung 7.2 dargestellt. Bis 700 Hz approximiert das reduzierte Modell das Ausgangsmodell mit Abweichungen bis maximal 2 %. Dies entspricht den ersten 18 Eigenfrequenzen. Für die Konzeptfindung und die Optimierungsphase der modellbasierten Entwicklung, in denen die Untersuchung,

Analyse und Bewertung einer prinzipiellen Lösungsidee im Vordergrund steht wird diese Modellgüte als ausreichend angesehen.

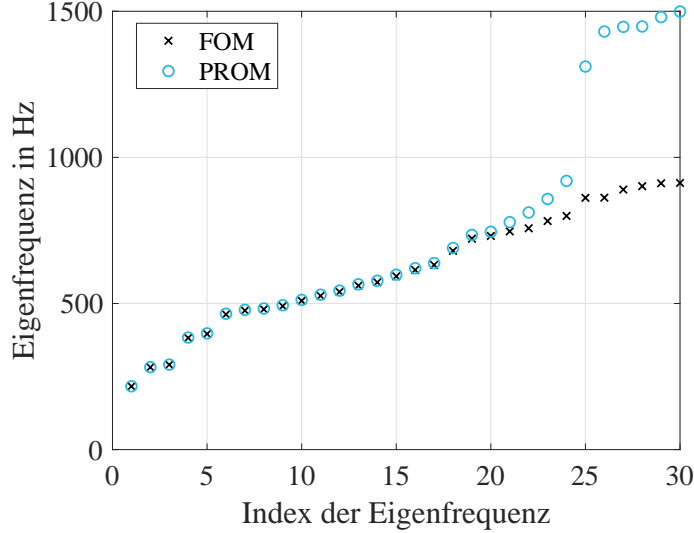


Abbildung 7.2: Verlauf der Eigenfrequenzen des Federbeindoms - Vergleich zwischen FOM und PROM

### 7.1.2 Optimierung des strukturellen Verhaltens

Das Federbeinlager, welches sich im Federbeindom abstützt, bildet die Schnittstelle zwischen Federbein und Karosserie. Der Federbeindom nimmt dabei die statischen Kräfte der Karosserie auf und stützt fahrdynamische Kräfte ab. Zudem sollen zur Komfortsteigerung Abroll- und Straßengeräusche von der Karosserie isoliert werden. Hieraus ergeben sich die Anforderungen einer hohen statischen Steifigkeit und einem geringen dynamischen Übertragungsverhalten am Scheitel des Federbeindoms in Hochrichtung. Die Hochrichtung entspricht der Richtung der Krafteinleitung bei Anregungen aus dem Fahrwerk.

Folglich wird die Optimierung des strukturellen Verhaltens mit den folgenden Zielen durchgeführt:

1. Reduktion des Gesamtgewichts des Federbeindoms bei
2. gleichbleibender oder höherer statischer Steifigkeit am Scheitel des Federbeindoms in Hochrichtung und
3. gleichbleibender oder niedrigerer maximaler Amplitude des Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung an ebendieser Stelle im Frequenzbereich 0-500 Hz

Das mathematische Optimierungsproblem und die dazugehörigen Ungleichungsnebenbedingungen lauten:

$$\min_{\mathbf{p} \in P} m(\mathbf{p}) \quad | \quad P = \{\mathbf{p} \mid |H_{stat}(\mathbf{p})| \leq |H_{stat,0}|; \max(|H(\mathbf{p})|) \leq \max(|H_0|)\} \quad (7.1)$$

mit den Designvariablen  $\mathbf{p} = [E^s, \rho^s, h^s]$ , der Übertragungsfunktion  $H$  im Bereich 0-500 Hz sowie dem statischen Anteil der Übertragungsfunktion  $H_{stat}$ .

Auf Basis des parametrischen Modells des Federbeindoms (Abschnitt 7.1.1) sowie des in Abschnitt 6.2.2 beschriebenen Optimierungsverfahren wurde eine numerische Optimierung des statischen und dynamischen Verhaltens durchgeführt. Mittels einer solchen multidisziplinären Mehrzieloptimierung ist es möglich, optimale Designparameter zu bestimmen und die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Substrukturen unmittelbar zu berücksichtigen.

Die Simulated Annealing-Optimierung wurde mit den Pseudotemperaturen von  $T_{start} = 10^{-2}$  und  $T_{min} = 10^{-8}$  und der maximalen Anzahl von Iterationen ohne Verbesserung des Funktionswertes von  $n_{max,it} = 1000$  durchgeführt. Nach jeweils fünf Iterationen wurden die berechneten Designvariablen mit im Automobilbau üblichen Materialien und Materialkombinationen aktualisiert. Dabei wurde jeweils das Material mit der geringsten Abweichung zwischen Ist- und Sollwert für den Elastizitätsmodul  $E$  gewählt. Ein Auszug aus den für die Optimierung verwendeten Materialien ist in Tabelle 7.4 angegeben.

Tabelle 7.4: Auszug aus für die Optimierung verwendeten Materialien

Material	$E$ in GPa	$\rho$ in g/cm <sup>3</sup>	$\nu$
Endlosglasfaserverstärkter Kunststoff	32	1,67	0,35
Warmumgeformter Mangan-Bor-Stahl	205	7,85	0,28
Kaltumformstahl	211	7,8	0,28
Stahl-Werkstoffverbund	208	7,3	0,28
Magnesiumlegierung	45	1,81	0,3
Aluminiumblech	68,9	2,71	0,34
Aluminiumguss	79,6	2,64	0,33
Titanlegierung	126	4,51	0,3

Nach 105 Iterationen wurde  $n_{max,it}$  überschritten und eine mögliche Konfiguration gefunden, welche alle Optimierungsziele erfüllt.

### 7.1.3 Vergleich Referenz- und optimierte Struktur

Die resultierende Materialauswahl, basierend auf den Optimierungsergebnissen aus Abschnitt 7.1.2, ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Durch die Integration innovativer Modellierungs- und Optimierungsmethoden konnte ein Leichtbaukonzept entwickelt werden, das im Sinne eines intelligenten Materialmix die Stärken der jeweiligen Werkstoffe kombiniert.

Die vorgegebenen Ziele konnten dabei insbesondere durch die Anwendung einer Mehrzieloptimierung erreicht werden. In Tabelle 7.5 sind die mechanischen Eigenschaften der Ausgangs- sowie der optimierten Varianten des Federbeindoms aufgelistet. Das Gewicht der drei Varianten wurde aus den CAD-Modellen abgeleitet. Die Masse des optimierten Modells wurde gegenüber dem Serienmodell um mehr als 50 % reduziert. Gleichzeitig konnte die statische Steifigkeit am Scheitel des Federbeindoms um

## 7.1 Strukturdynamische Analyse und Optimierung eines Federbeindoms

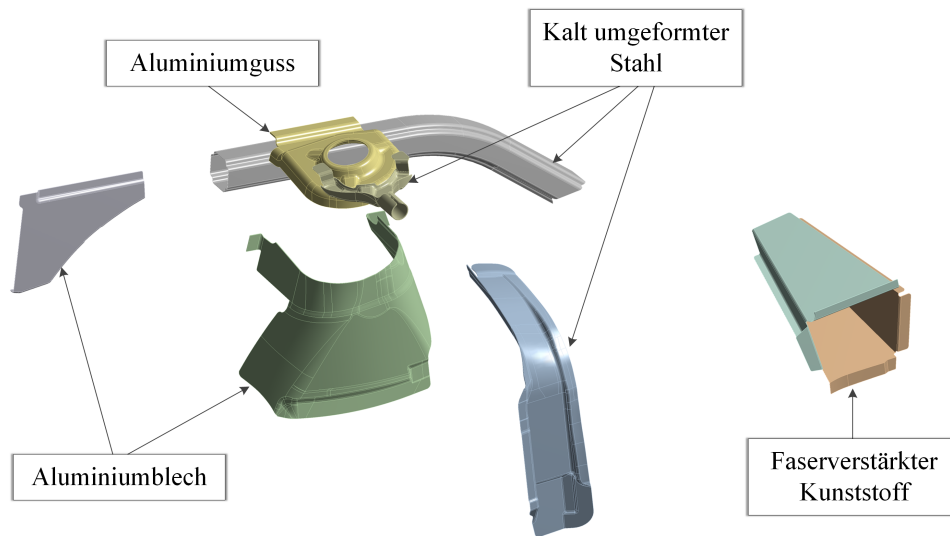


Abbildung 7.3: CAD-Modell des Federbeindoms mit optimierter Materialauswahl

den Faktor 2 erhöht werden. Die maximale Amplitude im Frequenzbereich 0-500 Hz wurde auf ca. 70 % vermindert.

Tabelle 7.5: Vergleich der mechanischen Eigenschaften zwischen Ausgangs- und optimierter Variante

Modell	Masse	Statische Steifigkeit	Max. Amplitude 0-500 Hz
Serienmodell	7.13 kg	111.2 kN/mm	0.113 mm/kN
Vereinfachtes Modell	6.54 kg	176.8 kN/mm	0.097 mm/kN
Optimiertes Modell	3.34 kg	243.7 kN/mm	0.079 mm/kN

Die Abbildung 7.4 zeigt das FE-Netz sowie die dominierende Eigenmode des optimierten Modells des Federbeindoms. Die maximalen Schwingungsamplituden in Abbildung 7.4b treten dabei am vorderen Querbalken, der die Anbindung zum Vorderwagen darstellt, auf. Die möglicherweise resultierende negative Auswirkung auf das akustische oder strukturdynamische Verhalten wurde in dieser Arbeit nicht weiter untersucht. Anhand dieser beispielhaft ausgewählten Auswirkung lässt sich allerdings gut nachvollziehen, dass es immer noch einer ingenieurmäßigen Prüfung und Bewertung der mathematischen Optimierungsergebnisse bedarf. Grundsätzlich lassen sich mit dem vorgestellten Verfahren weitere Nebenbedingungen integrieren und in einem iterativen Vorgehen berücksichtigen.

Für die vorliegende Optimierungsaufgabe ergeben sich letztlich die Frequenzgänge in Abbildung 7.5. Dargestellt ist das Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung am Scheitel des Federbeindoms für die Serienanwendung, die vereinfachte sowie die optimierte Variante. Die Anzahl der relevanten Eigenfrequenzen im betrachteten Frequenzbereich 0-500 Hz bleibt gleich, die Lage der ersten beiden

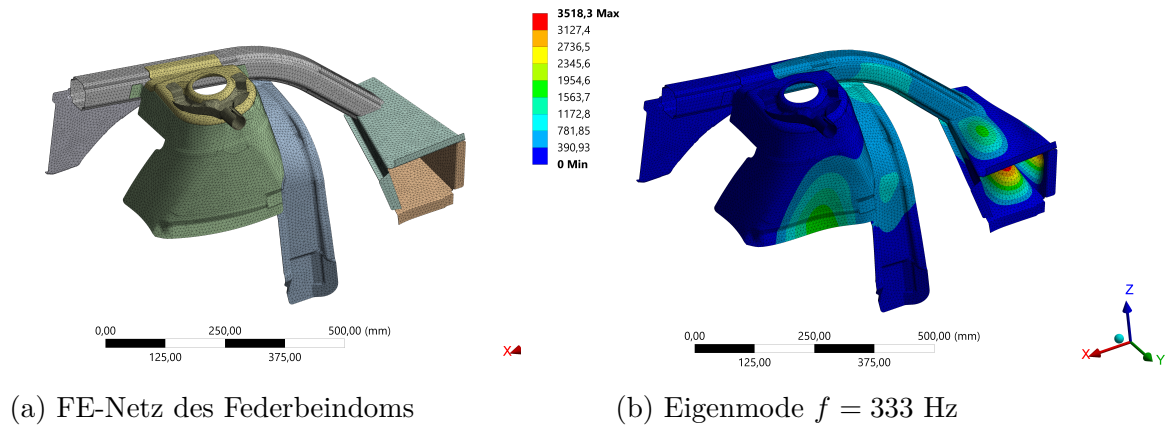


Abbildung 7.4: FE-Modell des Federbeindoms

Eigenfrequenzen verschiebt sich durch die Anpassungen auf unter 350 Hz. Zudem lässt sich in Abbildung 7.5 eine mittlere Reduktion der Schwingungsamplituden im gesamten Frequenzbereich erkennen.

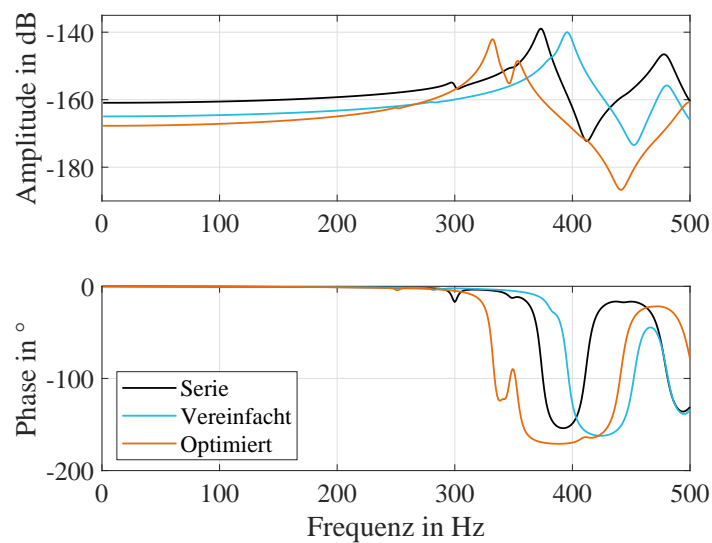


Abbildung 7.5: Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung am Federbeindom, Vergleich zwischen Ausgangs- und optimierter Variante

### 7.1.4 Bewertung und Diskussion

In diesem Abschnitt wurde das Potential der entwickelten Methoden anhand einer konkreten industriellen Anwendungen aus dem Bereich der Schwingungstechnik numerisch untersucht und bewertet. Die Tauglichkeit der vorgestellten Methodik wurde anhand einer strukturdynamischen Optimierung eines Federbeindoms analysiert. Diese Anwendung wurde vor dem Hintergrund der Gewichtsoptimierung und nachhaltigen Gestaltung von zukünftigen Fahrzeugkonzepten betrachtet. Es konnte gezeigt



werden, dass die Reduktion des Gesamtgewichts des Federbeindoms bei gleichzeitiger Erhöhung der statischen Steifigkeit und Reduktion der maximalen Amplitude der Übertragungsfunktion am Scheitel des Federbeindoms möglich ist.

Hinsichtlich der wichtigsten Phasen der modellbasierten Entwicklung konnten die Potentiale der parametrischen Modelle aufgezeigt werden. In der Konzeptfindung des überarbeiteten Federbeindoms konnte das entwickelte Vorgehen zur Effizienzsteigerung bei der Analyse und Bewertung möglicher Konzepte und Designentwürfe beitragen. Durch die Verknüpfung mit geeigneten Algorithmen konnten die Entwurfsraumbewertungen und Optimierungen erheblich beschleunigt werden. Zuletzt konnte die Ausgestaltung und Detaillierung der einzelnen Teilsysteme ebenfalls durch parametrische Substrukturen verbessert werden.

## 7.2 Virtuelle Sensorik in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung

### 7.2.1 Versuchseinrichtung

Die betrachtete Versuchsumgebung (Abbildung 7.6) wird zur hochfrequenten Charakterisierung von Elastomerlagern verwendet. Insbesondere im automobilen Entwicklungsprozess werden zunehmend Elastomerkomponenten zur Schwingungsberuhigung und zur Verbesserung des akustischen Verhaltens genutzt. Moderne Elastomerlager im Bereich des Fahrwerks oder zur Abstützung der Aggregate werden detailliert untersucht und für den spezifischen Anwendungsfall ausgelegt. Ein maßgebliches Kriterium stellt dabei die dynamische Steifigkeit dar. Konventionelle Verfahren zur Modellbildung dieser häufig nichtlinearen und frequenzabhängigen Systeme stoßen hierbei schnell an ihre Grenzen. Dennoch ist ein tiefgreifendes Systemverständnis und adäquate Simulationsmodelle für Gesamtsystems Simulationen im Kontext der modellbasierten Systementwicklung notwendig.

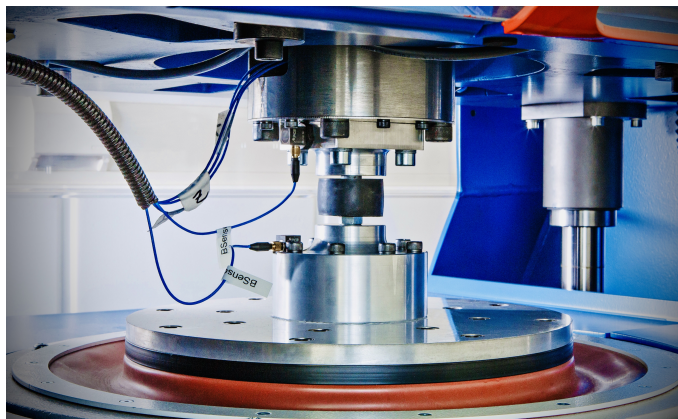


Abbildung 7.6: Hochdynamische Versuchseinrichtung

Zur Ableitung und zur Kalibrierung numerischer Modelle bietet sich die entwickel-

te und validierte Methode zur parametrischen Beschreibung dynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen an. Die parametrischen Modelle können detailliert bezüglich ihrer Geometrie aufgebaut werden und das schwer zu beschreibende Materialverhalten des Elastomers kann durch nachträgliche Anpassung der Materialwerte parallel zum Experiment abgeglichen werden. Zudem besteht die Möglichkeit durch Aktualisierung der Daten und Modelle über den gesamten Lebenszyklus des Produktes eine zuverlässige Nachverfolgbarkeit zu erreichen und individualisierte virtuelle Abbilder zu realisieren.

Zunächst wird die Versuchseinrichtung durch ein vereinfachtes Modell beschrieben und mit einem parametrischen Lagermodell gekoppelt. Auf Basis von experimentell ermittelten Daten der Versuchseinrichtung wird die dynamische Steifigkeit eines Lagers ermittelt und ein Modellabgleich durchgeführt. Die Versuchsdaten stehen im Zeit- und Frequenzbereich zur Verfügung und das Systemmodell der Versuchsumgebung ist in Matlab/Simulink implementiert. Abschließend wird die Verwendung des parametrischen Modells als virtuelle Sensorik diskutiert und bewertet.

### 7.2.2 Aufbau und Aufgabenstellung

Die hochdynamische Versuchseinrichtung besteht im Wesentlichen aus einem elektrodynamischen Shaker, einer seismischen Masse und Sensorik. Abbildung 7.7 zeigt eine schematische Darstellung der Versuchseinrichtung. Der Shaker und die seismische Masse sind elastisch gegenüber der Umgebung gelagert. Dazwischen befinden sich das Versuchsobjekt selbst, ein oberer und ein unterer Adapter sowie eine Kraftmessdose. Mithilfe dieses Versuchsaufbaus kann die dynamischen Steifigkeit des Versuchsobjekts messtechnisch bestimmt werden. Dabei stellt die dynamische Steifigkeit das Übertragungsverhalten des Differenzweges zwischen Ober- und Unterseite des Lagers zur resultierenden Lagerkraft dar.

Der gültige Frequenzbereich für die dynamische Charakterisierung beträgt 50-2000 Hz. Die Messung der Kraftreaktion erfolgt mithilfe einer Kraftmessdose zwischen dem oberen Adapter und der seismischen Masse. Der benötigte Differenzweg wird durch zusätzlich applizierte Beschleunigungsaufnehmer und eine nachgelagerte Korrekturrechnung bestimmt. Die Sensoren messen dabei die Beschleunigungen am oberen sowie am unteren Adapter und die Sensordaten werden anschließend offline doppelt integriert. Je nach Bauform des Versuchsobjekts kommen unterschiedliche Adapter mit unterschiedlichen dynamischen Eigenschaften zum Einsatz. Insbesondere für hochdynamische Versuche verfälschen diese Adapter das Messergebnis signifikant und der Einfluss auf die Gesamtdynamik der Versuchseinrichtung muss ebenfalls offline korrigiert werden. Das momentan übliche Verfahren sieht daher vor, die gemessene Kraft durch einen massenabhängigen Korrekturterm im Frequenzbereich zu bereinigen. Die zugehörige Berechnungsvorschrift lautet

$$F_{korrigiert}(s) = F_{KMD}(s) - (m_{A,o} + m_{KMD})\ddot{X}_{A,o}(s) \quad (7.2)$$

## 7.2 Virtuelle Sensorik in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung

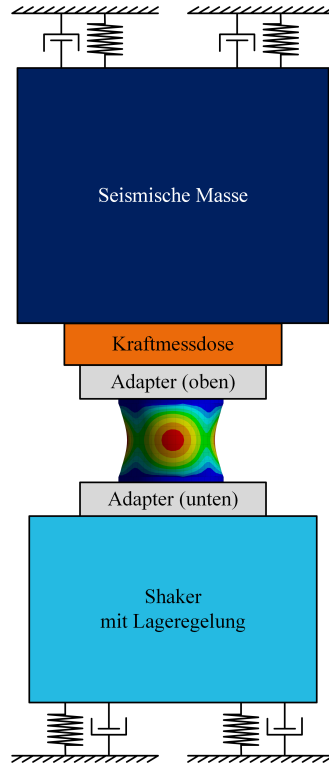


Abbildung 7.7: Schematische Darstellung der hochdynamischen Versuchseinrichtung

mit der gemessenen Kraft in der Kraftmessdose  $F_{KMD}$ , der oberen Adaptermasse  $m_{A,o}$ , der effektiven Masse der Kraftmessdose  $m_{KMD}$  sowie der gemessenen Beschleunigung am oberen Adapter  $\ddot{x}_{A,o}$ . Die dynamische Steifigkeit des Versuchsobjekts wird anschließend durch

$$c_{dyn,korrigiert}(s) = \frac{F_{korrigiert}(s)}{(X_{A,o}(s) - X_{A,u}(s))} \quad (7.3)$$

berechnet.

Die Verwendung eines parametrischen Modells als virtuelle Sensorik kann an zwei Stellen des gegenwärtigen Arbeitsablaufs vorteilhaft sein. Zunächst sollte die Dynamik der Adapter bereits im virtuellen Abbild der Versuchsumgebung eliminiert werden können. Zudem sollte es möglich sein, neben der Trägheit auch steifigkeitsabhängige Einflüsse der Adapter auf die Gesamtdynamik zu ermitteln. Dies wird insbesondere bei mehrdimensionaler Charakterisierung der Versuchsobjekte bedeutsam. Weiterhin sollten die zusätzlichen Beschleunigungsaufnehmer durch virtuelle Sensoren ersetzt werden können. Auf Basis eines an einigen wenigen Stellen abgeglichenen Simulationsmodells der Versuchsumgebung sollten die dynamischen Eigenschaften des Versuchsobjekts wirklichkeitstreu und in Echtzeit berechnet werden. Damit wäre die nachgelagerte Korrekturrechnung obsolet.

### 7.2.3 Modell der Versuchseinrichtung

Das Gesamtmodell der Versuchseinrichtung besteht aus einem vereinfachten 1D-Modell mit diskreten Parametern. Die Massen sind dabei in Admittanz- ( $v/F$ ) und die Koppellemente in Impedanz-Formulierung ( $F/v$ ) beschrieben. Das entsprechende Simulink-Modell der hochdynamischen Versuchseinrichtung ist in Abbildung 7.8 dargestellt und die verwendeten diskreten Parameter sind in Anhang B zusammengefasst. Die Ausgangsdaten, die auf Basis von realen Sensoren ermittelt werden können, sind in der Abbildung blau unterlegt. Die im Folgenden als virtuelle Sensorik genutzten Ausgangsdaten sind orange gekennzeichnet.

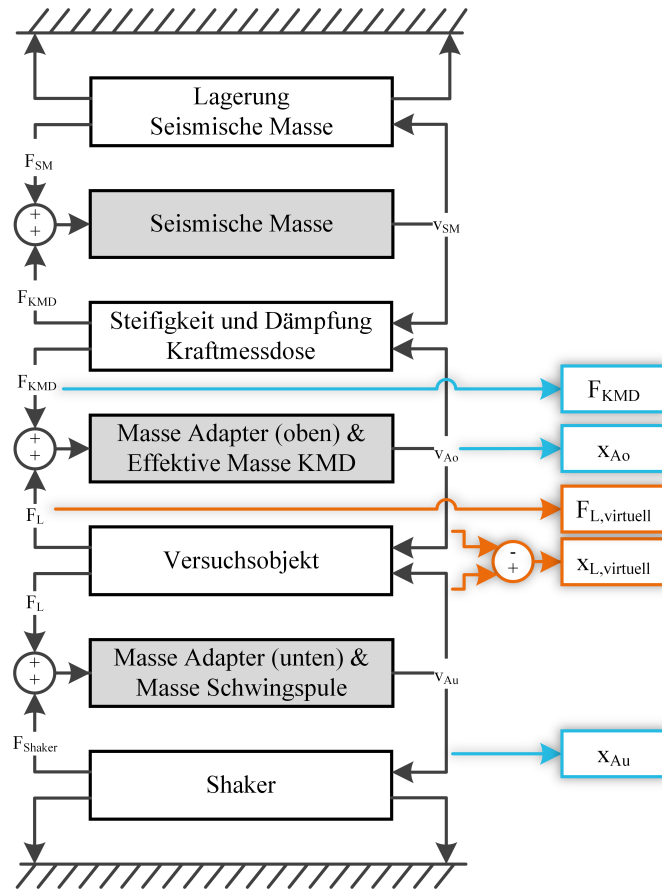


Abbildung 7.8: Simulink-Modell der hochdynamische Versuchseinrichtung

Das Versuchsobjekt wurde als FE-Modell (Abbildung 7.9b) aufgebaut und es wurde ein echtzeitfähiges Simulationsmodell mit den in Kapitel 5 vorgestellten Methoden der Modellreduktion abgeleitet. Das FE-Netz des Ausgangsmodells setzt sich aus 45826 Knoten zusammen und besitzt 135678 Freiheitsgrade. In dem parametrischen Modell bleiben vier physikalische Parameter, bestehend aus dem Elastizitätsmodul, der Dichte sowie den Rayleigh-Dämpfungsbeiwerten des Elastomers, erhalten. Für das CMS-Modell wurden  $n_{cms} = 4$  Eigenmoden berücksichtigt und die Koppel-Freiheitsgrade wurden auf  $n_k = 2$  reduziert. Dadurch entsteht ein PROM in Darstellung eines Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung (5.44) mit der Dimension  $r = 8$ .

## 7.2 Virtuelle Sensorik in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung

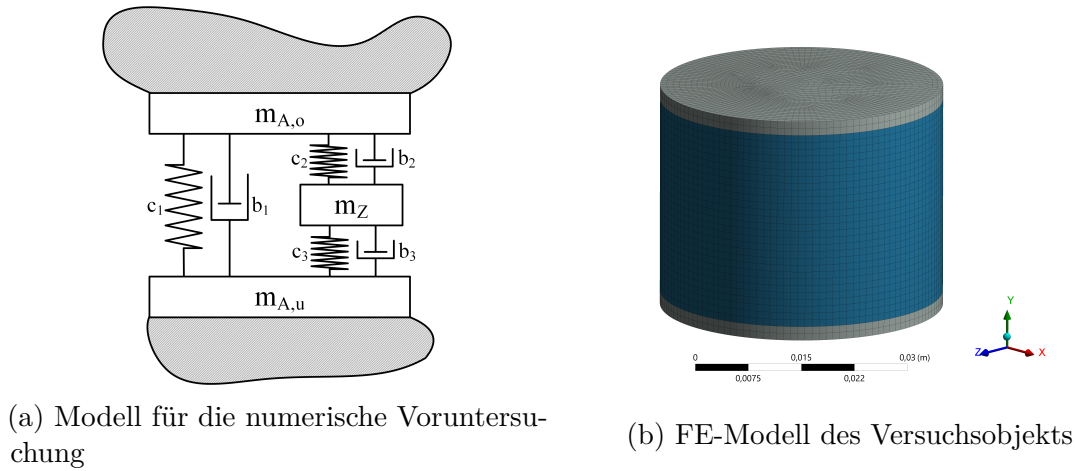


Abbildung 7.9: Modelle des Versuchsobjekts

Zunächst wurden numerische Voruntersuchungen zur Ermittlung des Einflusses der Adapter-Massen auf das Versuchsergebnis durchgeführt. Hierbei wurde das Versuchsobjekt durch eine Reihen- und Parallelschaltung von idealen Elastizität- und idealen Viskosität-Elementen sowie einer Zwischenmasse angenähert. Das Modell ist in Abbildung 7.9a dargestellt. Der Einfluss der Adapter-Masse wurde in einer Parametervariation untersucht. Die Masse  $m_{A,o}$  wurde im Bereich von 0.7-1.3 kg variiert. Die resultierenden dynamischen Steifigkeiten sind in Abbildung 7.10 gegenübergestellt. Es kann ein relevanter Einfluss der Masse des oberen Adapters auf das dynamische Verhalten festgestellt werden.

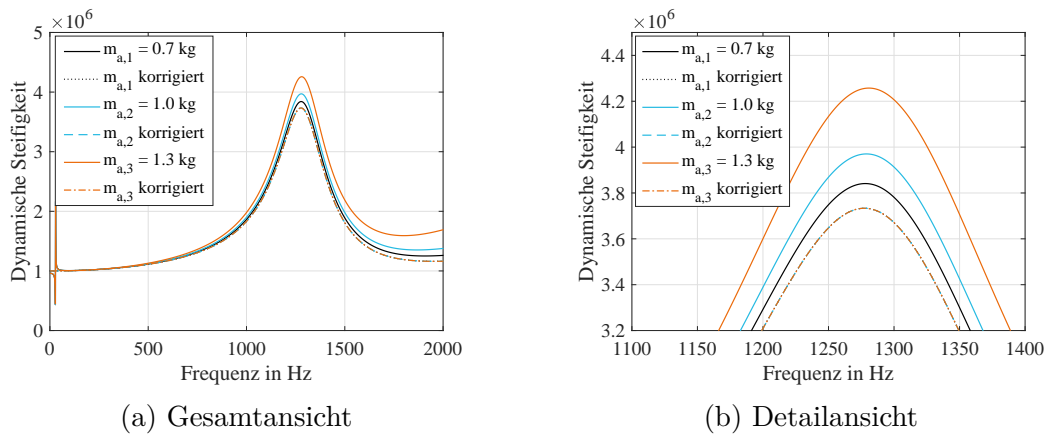


Abbildung 7.10: Einfluss der Adapter-Masse auf das Versuchsergebnis

Die korrigierten dynamischen Steifigkeiten stimmen im gesamten Frequenzbereich bis 2000 Hz überein. Der Einfluss der Adapter-Masse kann somit durch die konventionelle Methode nach Gleichung (7.2) nachträglich kompensiert werden. Die Ergebnisse basieren vollständig auf den Ausgangsdaten, welche im Versuch als reale Sensordaten vorliegen. Abbildung 7.11 zeigt den Vergleich der offline korrigierten

und unmittelbar aus virtuellen Sensordaten berechneten dynamischen Steifigkeit

$$c_{dyn,virtuell}(s) = \frac{F_{L,virtuell}(s)}{X_{L,virtuell}(s)}. \quad (7.4)$$

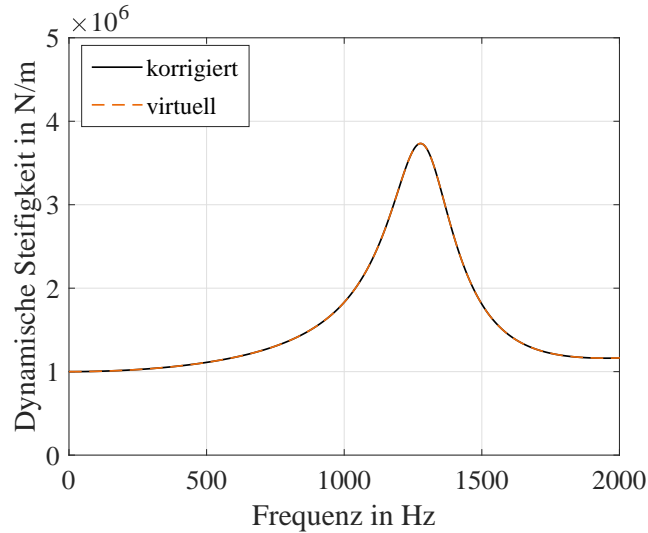


Abbildung 7.11: Vergleich der offline korrigierten und unmittelbar berechneten dynamischen Steifigkeit

Die beiden dynamischen Steifigkeiten sind ebenfalls im gesamten Frequenzbereich identisch. Aus der numerischen Voruntersuchung lässt sich daher ableiten, dass die virtuelle Sensorik auf Basis des parametrischen Strukturmodells das Potential bietet, die korrekte dynamische Steifigkeit parallel zum Versuch und ohne zusätzliche Sensorik zu ermitteln.

## 7.2.4 Virtuelle Sensorik

Zur Umsetzung einer virtuellen Sensorik ist ein möglichst umfassendes digitales Abbild eines spezifischen und individuellen Produkts notwendig, welches seinen physischen Gegenpart idealerweise über alle Phasen des Produktlebens begleitet. Das zugrundeliegende Simulationsmodell wird dabei mit realen Lastdaten, die durch integrierte Sensorik am realen System aufgezeichnet werden, beaufschlagt. Damit wird es möglich, den momentanen, physischen Zustand des Systems im Modell abzubilden und regelmäßig durch Sensordaten abzugleichen. Darüber hinaus können weitergehende Informationen berechnet werden, die reale Sensoren kaum oder nicht wirtschaftlich darstellen können. Durch diese virtuelle Sensorik können zum einen tiefgreifende Systemanalysen durchgeführt werden, zum anderen besteht die Möglichkeit Hardware-Sensorik einzusparen und zu ersetzen.

Im Anwendungsfall der hochdynamischen Versuchseinrichtung soll daher untersucht werden, ob die zusätzlichen Beschleunigungsaufnehmer an den Adaptern durch das entwickelte parametrische Modell substituiert werden können. Die Basis der

## 7.2 Virtuelle Sensorik in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung

weiterführenden Untersuchung stellt das vorgestellte Simulink-Modell der Versuchseinrichtung (Abbildung 7.8) dar. Im Vergleich zum vorangegangenen Abschnitt wird lediglich das vereinfachte Modell des Versuchsobjekts durch das parametrische ordnungsreduzierte Modell des Elastomerlagers aus Abbildung 7.9 ersetzt. Die Schnittstellen zwischen den Subsystemen und die gewählten Modellparameter bleiben bestehen.

Im Versuch wurde als Anregungssignal ein Gleitsinus zwischen 50 Hz und 2000 Hz mit konstanter Beschleunigungsamplitude genutzt. Am physischen Objekt werden die Bewegungsgrößen am unteren Adapter  $x_{A,u}$  über die Positionsregelung des Shakers und die Kraft  $F_{KMD}$  zwischen oberen Adapter und seismischer Masse mithilfe der Kraftmessdose gemessen. Aus dem Quotient der beiden Messgrößen ergibt die unkorrigierte dynamische Steifigkeit  $c_{0,mess} = \frac{F_{KMD}}{x_{A,u}}$ . Der Vergleich des gemessenen und offline korrigierten Übertragungsverhaltens von Verschiebung zu Kraft am Versuchsobjekt ist in Abbildung 7.12 dargestellt.

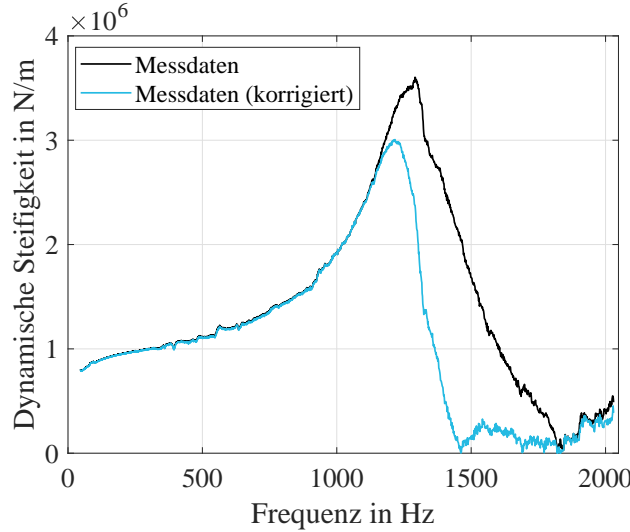


Abbildung 7.12: Vergleich des gemessenen und offline korrigierten Übertragungsverhaltens von Verschiebung zu Kraft am Versuchsobjekt

Parallel zur Verarbeitung der Messdaten werden die beiden Größen  $F_{KMD,sim}$  und  $x_{A,u,sim}$  am virtuellen Abbild bestimmt und in gleicher Weise eine dynamische Steifigkeit  $c_{0,sim}$  ermittelt. Der relative Fehler in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls  $E_e$  der Elastomerkomponente kann infolgedessen durch

$$e(E_e) = \frac{c_{0,sim} - c_{0,mess}}{c_{0,mess}} \quad (7.5)$$

berechnet und wie in den vorangegangenen Anwendungsbeispielen mit

$$\min_{E_e \in P} e(E_e) \quad | \quad P \subset \mathbb{R} \quad (7.6)$$

minimiert werden. Die Anpassung des Elastizitätsmoduls  $E_e$  wird für diskrete Fre-

quenzstützstellen durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit wurde der Stützstellenabstand von  $\Delta f = 5$  Hz gewählt. Zwischen den Stützstellen kann in den folgenden Anwendungen des abgeglichenen Modells linear interpoliert werden.

Zur Ermittlung der tatsächlichen dynamischen Steifigkeit des Elastomerlagers werden zusätzlich die virtuellen Sensorgrößen  $F_{L,virtuell}$  und  $x_{L,virtuell}$  ausgelesen. Gemäß Gleichung 7.4 wird auf Grundlage dieser virtuellen Sensorgrößen die dynamische Steifigkeit  $c_{dyn,virtuell}$  ermittelt. Die Berechnung kann dabei zeitgleich zum Versuch online durchgeführt werden. Das offline korrigierte und mittels virtueller Sensorik aufgezeichnete Übertragungsverhalten von Verschiebung zu Kraft am Versuchsobjekt ist in Abbildung 7.13 dargestellt. Der Vergleich zeigt im gesamten betrachteten Frequenzbereich eine sehr gute Übereinstimmung.

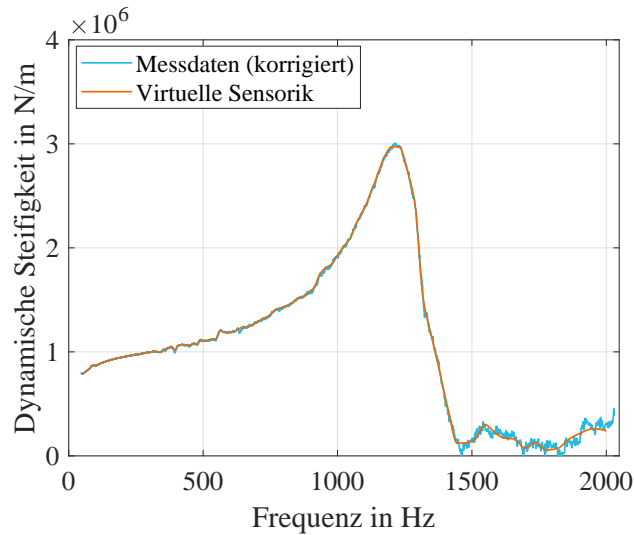


Abbildung 7.13: Vergleich des offline korrigierten und mittels virtueller Sensorik aufgezeichneten Übertragungsverhaltens von Kraft zu Verschiebung am Versuchsobjekt

Die identifizierten frequenzabhängigen Materialkennwerte können abschließend zusammen mit dem assoziierten FE-Modell in einer digitalen Akte des Elastomerlagers gespeichert werden. Die in diese Akte gespeicherten Parameter können für jedes untersuchte Elastomerlager individuell angepasst sein und in den folgenden Phasen des Produktlebens genutzt sowie aktualisiert werden.

### 7.2.5 Bewertung und Diskussion

In diesem Kapitel wurde die Anwendung des entwickelten parametrischen Modells als virtuelle Sensorik untersucht. Als Anwendungsbeispiel wurde die Charakterisierung eines Elastomerlagers mit frequenzabhängigen Eigenschaften in einer hochdynamischen Versuchsumgebung gewählt. Es wurde gezeigt, dass sich durch die entwickelten Methoden und Modelle zusätzliche Sensoren im Versuchsaufbau einsparen lassen. Zudem wurde das Potential aufgezeigt, ungewollte dynamische Effekte der Adaptierung im Versuchsaufbau bereits im virtuellen Abbild der Versuchsumgebung zu bestimmen



## *7.2 Virtuelle Sensorik in einer hochdynamischen Versuchseinrichtung*

und zu kompensieren. Im ersten Schritt wird durch die zeitgleiche Messdatenerfassung und Berechnung einiger Systemzustände die Korrektheit der Modelleigenschaften sichergestellt. Im zweiten Schritt können durch virtuelle Sensoren weitere Zustände ermittelt werden, die mit realer Sensorik nicht oder nur schwer gemessen werden können.

Das parametrische ordnungsreduzierte Modell kann im Vergleich zum ursprünglichen FE-Modell erheblich effizienter berechnet und optimiert werden. Für neue Designparameter muss keine neue Reduktion ausgeführt werden, sondern lediglich ein Modell mit neuem Parametersatz erzeugt werden. Somit lassen sich Frequenzabhängigkeiten einfach berücksichtigen, indem separate Arbeitspunkte als Modellparameter dienen.

Durch den gewählten Ansatz kann das vorgestellte parametrische Modell im Betrieb perspektivisch auch für die modellbasierte Diagnose verwendet werden. Der Verlauf und die Historie der Modellparameter kann zur Detektion von Fehlern genutzt werden, sobald sich unerwartete Abweichungen zwischen Modell und realem System ergeben. Durch die Möglichkeit eines Online-Modellabgleichs können die Modellparameter entsprechend aktualisiert und die Parameteränderungen zur Interpretation der Fehler genutzt werden. Hierzu sind entsprechende Fehlermodelle notwendig. Virtuelle Sensoren ermöglichen zudem nicht nur eine detaillierte Zustandsanalyse des betrachteten Systems, sondern werden zukünftig für Lebensdauer-Prognosen oder modellbasierte Zustandsüberwachung genutzt werden können.



# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

In der Industrie 4.0 bilden virtuelle Abbilder von realen Objekten die Grundlage für die Digitalisierung von Produkten oder Prozessen. Zur Entwicklung und Modellbildung physischer Objekte werden eine leistungsfähige und effiziente Entwicklungsumgebung sowie erweiterte Methoden und Algorithmen benötigt. In der vorliegenden Arbeit wurde daher eine Methode zur parametrischen Beschreibung strukturdynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen entwickelt und validiert. Das vorgeschlagene Vorgehen leistet einen Beitrag zur zuverlässigen Nachverfolgbarkeit und einfachen Aktualisierung von Daten und Modellen über den gesamten Lebenszyklus eines Produktes. Die durchgängige Nutzung eines parametrischen Systemmodells im modellbasierten Entwicklungsprozess stand dabei im Zentrum der Arbeit.

Mit steigendem Rechenaufwand bei der Analyse von strukturdynamischen Systeme werden häufig Methoden zur Modellordnungsreduktion eingesetzt. Insbesondere in Verbindung mit Finite-Elemente-Modellen haben sich unterschiedliche Methoden etabliert. Diese sind bezüglich ihrer Approximationsgüte, Anwendbarkeit und numerischen Stabilität sehr ausgereift. Aktuelle Forschungsarbeiten im Feld der parametrischen Modellordnungsreduktion beschäftigen sich mit der Möglichkeit zur Anpassung von Designparametern im ordnungsreduzierten Modell, ohne dass dabei jedes Mal ein neues Modell aufgebaut werden muss. In der vorliegenden Arbeit sind Konzepte basierend auf der Kombination von etablierten nicht-parametrischen Methoden und numerischen Verfahren untersucht worden. Ausgehend von der modellbasierten Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme (V-Modell) wurde eine erweiterte strukturierte Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme entwickelt, analysiert und bewertet. Die Methodenentwicklung baut dabei auf numerischen Standardverfahren auf und kann in allen Phasen der modellbasierten Entwicklung Anwendung finden. Die Substrukturierung des Gesamtsystems sowie die parametrischen Beschreibungen der Teilsysteme ermöglichen es, konstruktive Parameter in einer numerischen und experimentellen Entwicklungsumgebung systematisch zu untersuchen und zu bewerten.

Bei der entwickelten Methode zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme für Echtzeit-Anwendungen handelt es sich um eine zweistufige

hybride Ordnungsreduktion auf Grundlage der Component Mode Synthesis und einer Interpolation lokal reduzierter Modelle. Durch den gewählten Ansatz können analytische Parameterabhängigkeiten und nichtlineare oder nicht-funktional beschreibbare Effekte abgebildet werden. In der ersten Stufe des vorgeschlagenen Verfahrens wirkt sich die etablierte und in effizienter Implementierung verfügbare Component Mode Synthesis sehr vorteilhaft auf die Offline-Phase der Modellbildung aus. Durch die zweite Stufe können die Modelle für die Online-Phase abhängig von den Echtzeit-Anforderungen in Komplexität und Genauigkeit skaliert werden.

Anhand von Anwendungsfällen aus dem Bereich der Schwingungstechnik wurde die Leistungsfähigkeit der entwickelten Modelle, insbesondere unter Berücksichtigung der Echtzeitfähigkeit und Parametrierbarkeit der Modelle zur Laufzeit, analysiert und bewertet. Ein beidseitig eingespannter Biegebalken wurde dafür genutzt, die numerische Umsetzung der Methode, den Einfluss der Modellparameter und die Leistungsfähigkeit der parametrischen Modelle zu untersuchen. Die Übertragbarkeit auf realistische industrielle Anwendungsszenarien wurde an dem Beispiel einer strukturdynamischen Optimierung eines Federbeindoms ausgearbeitet und dokumentiert. Die Detaillierung und Ausgestaltung sowie die experimentelle Validierung des verfolgten Konzeptes erfolgte ebenfalls anhand des eingangs betrachteten Biegebalkens. Hierbei wurde die Integration eines echtzeitfähigen parametrischen Modells der mechanischen Struktur in eine experimentelle Versuchsumgebung erprobt. Die Anwendbarkeit der entwickelten Methoden konnte somit aufgezeigt werden. Abschließend wurde das vorgestellte Vorgehen zur Implementierung virtueller Sensorik genutzt. Als Anwendungsbeispiel wurde die Charakterisierung eines Elastomerlagers mit frequenzabhängigen Eigenschaften in einer hochdynamischen Versuchsumgebung betrachtet. Es konnte gezeigt werden, dass sich physische Sensoren im Versuchsaufbau einsparen und ungewollte dynamische Effekte im Versuchsaufbau bereits im virtuellen Abbild der Versuchsumgebung bestimmen und kompensieren lassen.

Ein Mehrwert zu den aus der Literatur bekannten Ansätzen ergibt sich aus der durchgängigen parametrischen Modellbildung dynamischer Systeme von der Konzept- bis in die Betriebsphase. Unter Verwendung der entwickelten Methodik können Systeme mit smarten Eigenschaften konzipiert, ausgelegt und betrieben werden. Im Kontext der Schwingungstechnik und Strukturmechanik erweitert die Kombination aus Echtzeitfähigkeit und Parametrierbarkeit der Modelle zur Laufzeit den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft und Technik.

Für zukünftige Arbeiten bieten sich Anknüpfungspunkte im Bereich der Modellbildung, der Parametrierung und Optimierung sowie der erweiterten und alternativen Nutzung der vorgestellten Methoden und Modelle. Zur Interpolation der ordnungsreduzierten Modelle wurden in dieser Arbeit lokale Methoden genutzt. Globale Methoden bieten den Vorteil, in der Nutzungsphase noch deutlich recheneffizienter zu sein. Weiterführende Forschungsarbeiten können sich mit der geeigneten und effizienten Generierung der Projektionsmatrix sowie der notwendigen Diskretisierung des Parameterraums und der Anzahl der notwendigen lokalen Modelle auseinandersetzen. Weiterhin ist die Betrachtung von Parameter- und Modellunsicherheiten

im modellbasierten Entwicklungsprozess ein relevantes Forschungsthema. Bei der Analyse dieser Unsicherheiten können die entwickelten Methoden eingesetzt werden.

Hinsichtlich der physikalischen Korrektheit der Parameteranpassungen während einer Optimierung sind in dieser Arbeit Fragestellungen offengeblieben. Momentan ermöglicht das entwickelte Verfahren keine entsprechende Abschätzung. Die vorgenommenen Parameteränderungen sind daher nicht notwendigerweise physikalisch korrekt und müssen im Nachhinein für jeden Anwendungsfall einzeln geprüft werden. Hier besteht Entwicklungs- und Forschungsbedarf bei der automatisierten Bewertung der Parameteranpassungen.

In Bezug auf die Nutzungsphase der parametrischen Strukturmodelle ergeben sich interessante Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten. Durch die Kopplung der entwickelten Methoden mit Fehlermodellen wird erwartet, dass eine modellbasierte Diagnose technischer Systeme umsetzbar ist. Unerwartete Abweichungen zwischen Modell und realem System können genutzt werden, um Fehler zu detektieren und zu klassifizieren. Die virtuelle Sensorik kann neben einer detaillierten Zustandsanalyse zukünftig auch für Lebensdauer-Prognosen oder modellbasierte Zustandsüberwachung genutzt werden.

## *Kapitel 8 Zusammenfassung und Ausblick*

# Anhang A

## Systemmatrizen der Component Mode Synthesis

### A.1 Matrizen einer Substruktur

Steifigkeitsmatrix

$$\bar{\mathbf{C}}^s(\mathbf{p}^s) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{ii}^s(\mathbf{p}^s) & \bar{\mathbf{C}}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \\ \bar{\mathbf{C}}_{mi}^s(\mathbf{p}^s) & \bar{\mathbf{C}}_{mm}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{ii}^s = (\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s)^T \mathbf{C}_{ii}^s \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{im}^s = (\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s)^T \mathbf{C}_{ii}^s \boldsymbol{\Psi}_{im}^s + (\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s)^T \mathbf{C}_{im}^s \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{mi}^s = ((\boldsymbol{\Psi}_{im}^s)^T \mathbf{C}_{ii}^s + \mathbf{C}_{mi}^s) \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{mm}^s = ((\boldsymbol{\Psi}_{im}^s)^T \mathbf{C}_{ii}^s + \mathbf{C}_{mi}^s) \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{im}^s + (\boldsymbol{\Psi}_{im}^s)^T \mathbf{C}_{im}^s + \mathbf{C}_{mm}^s \quad (\text{A.5})$$

Massenmatrix

$$\bar{\mathbf{M}}^s(\mathbf{p}^s) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ii}^s(\mathbf{p}^s) & \bar{\mathbf{M}}_{im}^s(\mathbf{p}^s) \\ \bar{\mathbf{M}}_{mi}^s(\mathbf{p}^s) & \bar{\mathbf{M}}_{mm}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{ii}^s = (\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{im}^s = (\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s \boldsymbol{\Psi}_{im}^s + (\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s)^T \mathbf{M}_{im}^s \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mi}^s = ((\boldsymbol{\Psi}_{im}^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s + \mathbf{M}_{mi}^s) \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i^s \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mm}^s = ((\boldsymbol{\Psi}_{im}^s)^T \mathbf{M}_{ii}^s + \mathbf{M}_{mi}^s) \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{im}^s + (\boldsymbol{\Psi}_{im}^s)^T \mathbf{M}_{im}^s + \mathbf{M}_{mm}^s \quad (\text{A.10})$$

### Eingangsmatrix

$$\bar{\mathbf{B}}_{in}^s(\mathbf{p}^s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}_{in,m}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

### Ausgangsmatrix

$$\bar{\mathbf{B}}_{out}^s(\mathbf{p}^s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_{out,m}^s(\mathbf{p}^s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Matrizen des synthetisierten Gesamtsystems

### Steifigkeitsmatrix

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{\psi\psi} & \bar{\mathbf{C}}_{\psi\phi} \\ \bar{\mathbf{C}}_{\phi\psi} & \bar{\mathbf{C}}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\bar{\mathbf{C}}_{\psi\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{mi}^{(1)} & \bar{\mathbf{C}}_{mi}^{(2)} & \dots & \bar{\mathbf{C}}_{mi}^{n_s} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{ii}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{ii}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{\mathbf{C}}_{ii}^{n_s} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\phi\psi} = \left( \bar{\mathbf{C}}_{\psi\phi} \right)^T. \quad (\text{A.16})$$

### Massenmatrix

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{\psi\psi} & \bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi} \\ \bar{\mathbf{M}}_{\phi\psi} & \bar{\mathbf{M}}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

mit



$$\bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi} = \left[ \bar{\mathbf{M}}_{mi}^{(1)} \quad \bar{\mathbf{M}}_{mi}^{(2)} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{M}}_{mi}^{n_s} \right], \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{(2)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{ii}^{n_s} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{\phi\psi} = \left( \bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi} \right)^T. \quad (\text{A.20})$$

### A.3 Projektionsvorschriften zur Ordnungsreduktion der Koppelfreiheitsgrade

Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{C}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}_{\psi}^T \bar{\mathbf{C}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}_{\psi} \quad (\text{A.21})$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}_{\psi}^T \bar{\mathbf{C}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{C}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}_{\psi} \quad (\text{A.23})$$

Massenmatrix

$$\hat{\mathbf{M}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}_{\psi}^T \bar{\mathbf{M}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}_{\psi} \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}_{\psi}^T \bar{\mathbf{M}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) \quad (\text{A.25})$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{M}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}_{\psi} \quad (\text{A.26})$$

Dämpfungsmatrix

$$\hat{\mathbf{B}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}_{\psi}^T \bar{\mathbf{B}}_{\psi\psi}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}_{\psi} \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}_{\psi}^T \bar{\mathbf{B}}_{\psi\phi}(\mathbf{p}) \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{B}}_{\phi\psi}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}_{\psi} \quad (\text{A.29})$$



## Anhang B

# Simulink-Modell der hochdynamischen Versuchseinrichtung

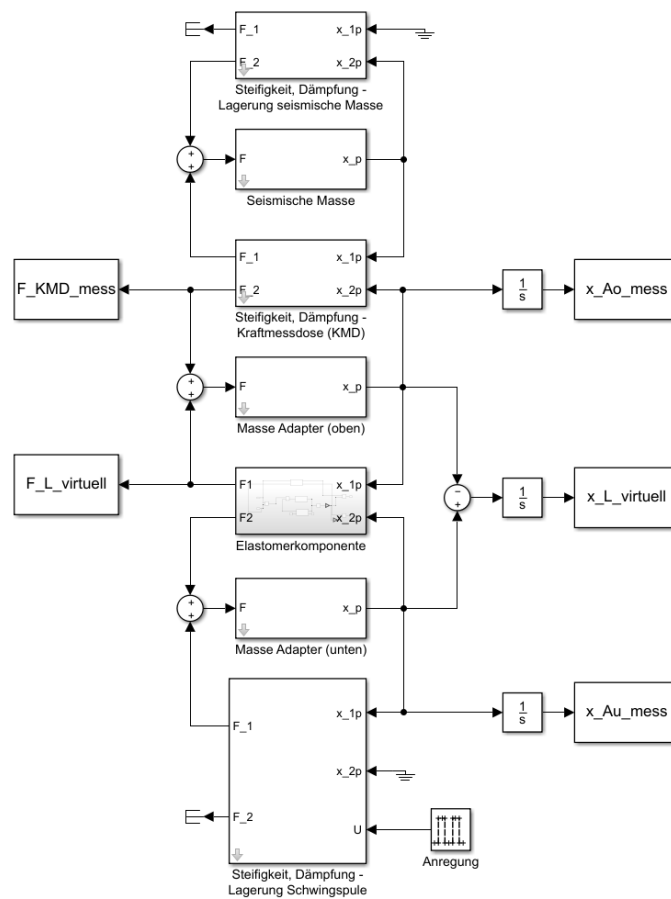


Abbildung B.1: Simulink-Modell der Versuchseinrichtung

Tabelle B.1: Simulationsparameter des Simulink-Modells

Steifigkeit Lagerung Seismische Masse	$c_{SM}$	$25 \cdot 10^6$ N/m
Dämpfung Lagerung Seismische Masse	$b_{SM}$	3000 kg/s
Seismische Masse	$m_{SM}$	800 kg
Steifigkeit Kraftmessdose	$c_{KMD}$	$10^9$ N/m
Dämpfung Kraftmessdose	$b_{KMD}$	1000 kg/s
Masse Adapter (oben) & Effektive Masse Kraftmessdose	$m_{A,o}$	1.3 kg
Masse Adapter (unten) & Masse Schwingspule	$m_{A,u}$	20 kg
Steifigkeit Lagerung Shaker (Schwingspule)	$c_{Shaker}$	1000 N/m
Dämpfung Lagerung Shaker (Schwingspule)	$b_{Shaker}$	500 kg/s
Kopplungsfaktor Shaker	$k_{Shaker}$	1.0 N/V

# Literaturverzeichnis

- [1] Abu-Rub, H.; Malinowski, M. und Al-Haddad, K. (2014). *Power Electronics for Renewable Energy Systems, Transportation and Industrial Applications*. John Wiley & Sons (UK).
- [2] acatech – Deutsche Akademie der Technikwissenschaften e.V. (2013). Umsetzungsempfehlungen für das Zukunftsprojekt Industrie 4.0 - Abschlussbericht des Arbeitskreises Industrie 4.0. URL [http://www.bmbf.de/pubRD/Umsetzungsempfehlungen\\_Industrie4\\_0.pdf](http://www.bmbf.de/pubRD/Umsetzungsempfehlungen_Industrie4_0.pdf).
- [3] Albers, A.; Brezger, F.; Merkel, P. und Stier, C. (2013). Validierungsmethoden für moderne Kupplungssysteme. *Konstruktion*, 65(1/2), 16–19.
- [4] Anderl, R.; Nattermann, R. und Rollmann, T. (2012). Das W-Modell - Systems Engineering in der Entwicklung aktiver Systeme. *PLM-Portal*. Hrsg.: Sandler, Ulrich.
- [5] Anderl, R.; Picard, A.; Wang, Y.; Fleischer, J.; Dosch, S.; Klee, B. und Bauer, J. (2015). *Leitfaden Industrie 4.0 - Orientierungshilfe zur Einführung in den Mittelstand*. VDMA Forum Industrie 4.0, Frankfurt.
- [6] ANSYS (2016). ANSYS Theory Reference: ANSYS Release 17.0.
- [7] Antoulas, A.C. (2005). *Approximation of Large-scale Dynamical Systems*. Advances in Design and Control. Society for Industrial & Applied Mathematics, U.S.
- [8] Antoulas, A.C. und Sorensen, D.C. (2001). Approximation of large-scale dynamical systems: An overview. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences (IJAMCS)*, 11(5), 1093–1121.
- [9] Bacic, M. (2005). On hardware-in-the-loop simulation. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 3194–3198. IEEE.
- [10] Bai, Z. und Su, Y. (2005). Dimension Reduction of Large-Scale Second-Order Dynamical Systems via a Second-Order Arnoldi Method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(5), 1692–1709.
- [11] Bai, Z. und Su, Y. (2005). SOAR: A Second-order Arnoldi Method for the Solution of the Quadratic Eigenvalue Problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26(3), 640–659.

- [12] Barbieri, G.; Fantuzzi, C. und Borsari, R. (2014). A model-based design methodology for the development of mechatronic systems. *Mechatronics*, 24(7), 833–843.
- [13] Bartel, T. (2014). *Entwicklung adaptiver Strukturen am Beispiel einer funktionsintegrierten Lagerung zur aktiven Schwingungsisolierung empfindlicher Geräte*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt.
- [14] Bathe, K. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall civil engineering and engineering mechanics series. Prentice-Hall.
- [15] Baur, U.; Beattie, C.; Benner, P. und Gugercin, S. (2011). Interpolatory Projection Methods for Parameterized Model Reduction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5), 2489–2518.
- [16] Bazaz, M.A.; Mashuq-un-Nabi und Janardhanan, S. (2012). A review of parametric model order reduction techniques. *2012 IEEE International Conference on Signal Processing, Computing and Control*, 1–6.
- [17] Bein, T. (2007). *Grundwissen des Ingenieurs*, Kapitel Mechatronik / Adaptronik (Kap. 22), 1019–1060. Carl Hanser Verlag GmbH & Company KG.
- [18] Bender, K. (2005). *Embedded Systems - qualitätsorientierte Entwicklung*. Springer-Verlag GmbH.
- [19] Benner, P. (2009). System-Theoretic Methods for Model Reduction of Large-Scale Systems: Simulation, Control, and Inverse Problems.
- [20] Benner, P.; Gugercin, S. und Willcox, K. (2015). A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems. *SIAM Review*, 57(4), 483–531.
- [21] Benner, P.; Sorensen, D.C.; Mehrmann, V.; Barth, T.J.; Griebel, M.; Keyes, D.E.; Nieminen, R.M.; Roose, D. und Schlick, T. (Hrsg.) (2005). *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer Berlin Heidelberg.
- [22] Betsch, P. (Hrsg.) (2016). *Structure-preserving Integrators in Nonlinear Structural Dynamics and Flexible Multibody Dynamics*. Springer International Publishing.
- [23] Borggaard, J.; Pond, K.R. und Zietsman, L. (2014). Parametric Reduced Order Models Using Adaptive Sampling and Interpolation. In *Preprints of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, 7773–7778. Cape Town, South Africa.
- [24] Bouscayrol, A. (2008). Different types of Hardware-In-the-Loop simulation for electric drives. In *2008 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2146–2151. IEEE.

- [25] Breitbach, E. (1982). Modal Synthesis Modal Correction — Modal Coupling. In H.G. Natke (Hrsg.), *Identification of Vibrating Structures*, 321–348. Springer Vienna, Vienna.
- [26] Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (2016). Zukunftschance Digitalisierung - Ein Wegweiser.
- [27] Bundesverband Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien e. V. (Bitkom); Verband Deutscher Maschinen- und Anlagenbau e.V. (VDMA) und Zentralverband Elektrotechnik- und Elektronikindustrie e.V.(ZVEI) (2015). Umsetzungsstrategie Industrie 4.0 - Ergebnisbericht der Plattform Industrie 4.0.
- [28] Bundesverband Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien e.V. (Bitkom) (2018). Perspektive der Arbeit im Zeitalter der vierten industriellen Revolution. URL <https://www.bitkom.org/Themen/Digitale-Transformation-Branchen/Industrie-40/Perspektive-der-Arbeit.html>. Abgerufen am 10.12.2018.
- [29] Castanier, M.; Tan, Y.C. und Pierre, C. (2001). Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis. *AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 39, 1182–1187.
- [30] Caughey, T.K. und O’Kelly, M.E.J. (1965). Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 32(3), 583.
- [31] Chahlaoui, Y.; Lemonnier, D.; Vandendorpe, A. und van Dooren, P. (2005). Second-order balanced truncation. *Linear Algebra and its Applications*.
- [32] Chaudhary, H. und Saha, S.K. (2008). *Dynamics and Balancing of Multibody Systems*. Springer-Verlag GmbH.
- [33] Corigliano, A.; Dossi, M. und Mariani, S. (2015). Model Order Reduction and domain decomposition strategies for the solution of the dynamic elastic-plastic structural problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290, 127–155.
- [34] Craig, R.R. und Bampton, M.C.C. (1968). Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*, 6(7), 1313–1319.
- [35] Dankert, J. und Dankert, H. (2011). *Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik*. Springer-Verlag.
- [36] Eichhorn, A. (2004). *Ein Beitrag zur Identifikation von dynamischen Strukturmodellen mit Methoden der adaptiven KALMAN-Filterung*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- [37] Eid, R.; Castane-Selga, R.; Panzer, H.; Wolf, T. und Lohmann, B. (2011). Stability-preserving parametric model reduction by matrix interpolation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(4), 319–335.

- [38] Eigner, M.; Roubanov, D. und Zafirov, R. (2015). Produktmodelle über den Lebenszyklus konsistent und vernetzt halten durch System Lifecycle Management. *Konstruktion - Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe*, 4, 62–63.
- [39] Eigner, M. (2014). *Überblick Disziplin-spezifische und -übergreifende Vorgehensmodelle*. Springer Berlin Heidelberg.
- [40] Eigner, M.; Dickopf, T. und Apostolov, H. (2017). The Evolution of the V-Model: From VDI 2206 to a System Engineering Based Approach for Developing Cybertronic Systems. In J. Ríos, A. Bernard, A. Bouras, und S. Foufou (Hrsg.), *Product Lifecycle Management and the Industry of the Future*, 382–393. Springer International Publishing, Cham.
- [41] Enokida, R. und Kajiwara, K. (2017). Nonlinear substructuring control for parameter changes in multi-degree-of-freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*, 407, 63 – 81.
- [42] Ewins, D.J. (2000). *Modal Testing: Theory and Practice*, volume 2. Research Studies Press Letchworth.
- [43] Feng, L. (2005). Review of model order reduction methods for numerical simulation of nonlinear circuits. *Applied Mathematics and Computation*, 167(1), 576–591.
- [44] Freund, R.W. (2000). Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123(1-2), 395–421.
- [45] Freund, R.W. (2000). Model Reduction Methods Based on Krylov Subspaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123, 395–421.
- [46] Friswell, M.I.; Garvey, S.D. und Penny, J.E.T. (1995). Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 186(2), 311–323.
- [47] Gaul, L. und Fiedler, C. (1998). *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg Verlagsgesellschaft.
- [48] Gausemeier, J.; Dumitrescu, R.; Steffen, D.; Czaja, A.; Wiederkehr, O. und Tschirner, C. (2013). Systems Engineering in der industriellen Praxis.
- [49] Gawronski, W. (2003). Discrete-time norms of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 264, 983–1004.
- [50] Gawthrop, P.J.; Wallace, M.I.; Neild, S.A. und Wagg, D.J. (2007). Robust real-time substructuring techniques for under-damped systems. *Structural Control and Health Monitoring*, 14(4), 591–608.



- [51] Geuss, M.; Panzer, H. und Lohmann, B. (2013). On parametric model order reduction by matrix interpolation. In *2013 European Control Conference (ECC)*, 3433–3438. IEEE.
- [52] Glaessgen, E. und Stargel, D. (2012). The Digital Twin Paradigm for Future NASA and U.S. Air Force Vehicles. In *Proceedings of the 53rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 1–14.
- [53] Green, M. und Limebeer, D.J.N. (1995). *Linear robust control*. Prentice Hall information and system sciences series. Prentice Hall, Englewood Cliffs and NJ.
- [54] Grimme, E.J. (1997). *Krylov Projection Methods for model reduction*. Dissertation, University of Illinois.
- [55] Gross, B. (1956). Lineare systeme. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 3(2), 235–296.
- [56] Grösser, S. (2018). Digitaler Zwilling. Berner Fachhochschule. URL <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/digitaler-zwilling-54371/version-277410>.
- [57] Gugercin, S. (2003). *Projection methods for model reduction of large-scale dynamical systems*. Dissertation, Rice University.
- [58] Guyan, R. (1965). Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal*, 3(2), 380.
- [59] Haag, S. und Anderl, R. (2018). Digital twin – Proof of concept. *Manufacturing Letters*, 15, 64–66.
- [60] Haberkellner, R.; de Weck, O.; Fricke, E. und Vössner, S. (2015). *Systems Engineering - Grundlagen und Anwendung*. Orell Füssli, 13. aktualisierte auflage 2015 Edition.
- [61] Herold, S.; Atzrodt, H.; Mayer, D. und Thomaier, M. (2006). Modeling approaches for active systems. In Y. Matsuzaki (Hrsg.), *Smart structures and materials 2006. Smart structures and integrated systems (Paper 61730N, SPIE Proceedings Series 6173)*, 1–11. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers -SPIE-, Bellingham/Wash.; American Society of Mechanical Engineers -ASME-, USA.
- [62] Herold, S.; Jungblut, T.; Kraus, R. und Melz, T. (2011). Modellbasierte Entwicklung aktiver strukturdynamischer Systeme am Beispiel eines aktiven Lagerungssystems. In *Proc. of Mechatronik*, 157–162.
- [63] Herold, S.; Jungblut, T. und Kurch, M. (2009). A Systematic Approach to Simulate Active Mechanical Structures. In *NAFEMS Seminar: Multi-Disciplinary Simulations – The Future of Virtual Product Development*, 12.

- [64] Hong, S.K.; Epureanu, B.I. und Castanier, M.P. (2013). Next-generation parametric reduced-order models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 37(1-2), 403–421.
- [65] Hong, S.K.; Epureanu, B.I.; Castanier, M.P. und Gorsich, D.J. (2011). Parametric reduced-order models for predicting the vibration response of complex structures with component damage and uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 330(6), 1091–1110.
- [66] International Council on Systems Engineering (INCOSE) (2007). Systems Engineering Vision 2020. Version/Revision: 2.03.
- [67] Isermann, R. (2008). *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Springer London, Limited.
- [68] Janschek, K. (2010). *Systementwurf mechatronischer Systeme*. Springer-Verlag GmbH.
- [69] Jensen, H.; Muñoz, A.; Papadimitriou, C. und Vergara, C. (2016). An enhanced substructure coupling technique for dynamic re-analyses: Application to simulation-based problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 307, 215–234.
- [70] Jungblut, T.; Kraus, R.; Millitzer, J.; Herold, S.; Melz, T. und Hanselka, H. (2012). Modellbasierte Entwicklung einer aktiven elastischen Lagerung für Aggregate. *Konstruktion*, 9, 68–74.
- [71] Jungblut, T. (2015). *Ein Beitrag zur modellbasierten, hybriden Entwicklung elektromechanischer Systeme zur Schwingungsminderung*. Dissertation, TU Darmstadt.
- [72] Kaden, A.; Walde, G.; Boche, B. und Luckner, R. (2012). Hardware-in-the-Loop-Simulation als Bestandteil des Entwicklungsprozesses für das automatische Flugsteuerungssystem der STEMME S15. *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*.
- [73] Karl-Heinrich Grote und Jörg Feldhusen (2007). *Dubbel*. Springer.
- [74] Klerk, D.D.; Rixen, D.J. und Voormeeren, S.N. (2008). General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review and Classification of Techniques. *AIAA Journal*, 46(5), 1169–1181.
- [75] Koutsovasilis, P. (2009). *Model Order Reduction in Structural Mechanics - Coupling the Rigid and Elastic Multi Body Dynamics*. Dissertation, Technische Universität Dresden.
- [76] Kurch, M. (2014). *Entwicklung einer Simulationsumgebung für die Auslegung piezoelektrischer Energy Harvester*. Dissertation, TU Darmstadt.

- [77] Lauber, R. und Göhner, P. (1999). *Prozessautomatisierung 2*. Springer Berlin Heidelberg.
- [78] Law, A.M. (2001). *Simulation Modeling and Analysis (McGraw-Hill International Editions: Industrial Engineering Series)*. McGraw-Hill (Tx).
- [79] Lee, J. und Cho, M. (2017). An interpolation-based parametric reduced order model combined with component mode synthesis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 319, 258–286.
- [80] Leung, A.T.M. und Khazaka, R. (2005). Parametric Model Order Reduction Technique For Design Optimization. In *2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1290–1293. IEEE.
- [81] Leung, A.Y.T. (1978). An accurate method of dynamic condensation in structural analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, 1705–1715.
- [82] Li, P.; Liu, F.; Li, X.; Pileggi, L. und Nassif, S. (2005). Modeling Interconnect Variability Using Efficient Parametric Model Order Reduction. In *Design, Automation and Test in Europe*, 1–6. IEEE.
- [83] Lin, W.Z.; Lee, K.H.; Lim, S.P. und Liang, Y.C. (2003). Proper orthogonal decomposition and component mode synthesis in macromodel generation for the dynamic simulation of a complex MEMS device. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13(5).
- [84] Lohmann, B. und Eid, R. (2009). Efficient order reduction of parametric and nonlinear models by superposition of locally reduced models. In *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik. Erlangen-Münchener Workshops*, 27–36.
- [85] Lunze, J. (2010). *Regelungstechnik 1 - Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer.
- [86] Lunze, J. (2010). *Regelungstechnik 2 - Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer.
- [87] MacNeal, R.H. (1971). A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4), 581–601.
- [88] Mayer, D.; Jungblut, T.; Millitzer, J. und Wolter, S. (2015). Hardware-in-the-loop Test Environments for Vibration Control Systems. In *Practical Aspects of Structural Dynamics*, 1–10.
- [89] Meyer, D. und Srinivasan, S. (1996). Balancing and model reduction for second-order form linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11), 1632–1644.

- [90] Millitzer, J.; Mayer, D.; Henke, C.; Jersch, T.; Tamm, C.; Michael, J. und Ranisch, C. (2019). Recent developments in hardware-in-the-loop testing. *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, 3, 65–73. doi:10.1007/978-3-319-74793-4\_10.
- [91] Millitzer, J.; Ranisch, C.; Tamm, C.; Bartolozzi, R. und Melz, T. (2017). An approach for the design of a mechanical Hardware-in-the-Loop interface. In *Smarte Strukturen und Systeme*, 1–8.
- [92] Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1), 17–32.
- [93] Mughal, A.M. (2016). *Real Time Modeling, Simulation and Control of Dynamical Systems*. Springer International Publishing.
- [94] Nattermann, R. (2014). *Integrierte, virtuelle Entwicklung adaptronischer Systeme*. Dissertation, TU Darmstadt, Aachen. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss. 2014.
- [95] Negri, E.; Fumagalli, L. und Macchi, M. (2017). A Review of the Roles of Digital Twin in CPS-based Production Systems. *Procedia Manufacturing*, 11, 939 – 948. 27th International Conference on Flexible Automation and Intelligent Manufacturing, FAIM2017, 27-30 June 2017, Modena, Italy.
- [96] O’Callahan, J.; Avitabile, P. und Riemer, R. (1989). System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP). In *7th International Modal Analysis Conference*, 29–37.
- [97] O’Callahan, J.C. (1989). A procedure for an improved reduced system (IRS) model. In *7th International Modal Analysis Conference*, volume 1, 17–21.
- [98] Odabasioglu, A.; Celik, M. und Pileggi, L.T. (2003). PRIMA: Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm. In A. Kuehlmann (Hrsg.), *The Best of ICCAD: 20 Years of Excellence in Computer-Aided Design*, 433–450. Springer US, Boston, MA.
- [99] Oswald, G. (2018). *Digitale Transformation*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- [100] Panzer, H.; Mohring, J.; Eid, R. und Lohmann, B. (2010). Parametric Model Order Reduction by Matrix Interpolation. *at - Automatisierungstechnik*, 58(8), 475–484.
- [101] Papadimitriou, C. und Papadioti, D.C. (2013). Component mode synthesis techniques for finite element model updating. *Computers & Structures*, 126, 15–28.
- [102] Papageorgiou, M.; Leibold, M. und Buss, M. (2012). *Optimierung*. Springer Berlin Heidelberg.

- [103] Park, K.C. und Park, Y.H. (2004). Partitioned Component Mode Synthesis via a Flexibility Approach. *AIAA Journal*, 42(6), 1236–1245.
- [104] Peeters, B.; Van der Auweraer, H.; Guillaume, P. und Leuridan, J. (2004). The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation? *Shock and Vibration*, 11(3-4), 395–409.
- [105] Phillips, J. und Silveira, L. (2004). Poor Mans TBR: A Simple Model Reduction Scheme. In *Proceedings Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, 1–6. IEEE Comput. Soc.
- [106] Phillips, J.R. (2000). Projection frameworks for model reduction of weakly nonlinear systems. In *Proceedings of the 37th conference on Design automation*, 1–6. ACM Press.
- [107] Plummer, A.R. (2006). Model-in-the-Loop Testing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 220(3), 183–199.
- [108] Preumont, A. (2011). *Vibration control of active structures: an introduction*, volume 179. Springer.
- [109] Qu, Z.Q. (2004). *Model order reduction techniques: With applications in finite element analysis*. Springer, London.
- [110] Rewienski, M.J. (2003). *A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems*. Dissertation, Technical University of Gdansk.
- [111] Rixen, D.J. (2004). A dual Craig–Bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2), 383–391.
- [112] Rubin, S. (1975). Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis. *AIAA Journal*, 13(8), 995–1006.
- [113] Ruhe, A. (1984). Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation. *Linear Algebra and its Applications*, 58, 391–405.
- [114] Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. CAMBRIDGE UNIV PR.
- [115] Salimbahrami, B. (2005). *Structure Preserving Order Reduction of Large Scale Second Order Models*. Dissertation, Technische Universitaet Muenchen.
- [116] Salimbahrami, B. und Lohmann, B. (2006). Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspace methods. *Linear Algebra and its Applications*, 415(2-3), 385–405.
- [117] Schilders, W. (2008). *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*. Springer-Verlag GmbH.

- [118] Schluse, M. und Rossmann, J. (2016). From simulation to experimentable digital twins: Simulation-based development and operation of complex technical systems. In *2016 IEEE International Symposium on Systems Engineering (ISSE)*, 1–6. IEEE.
- [119] Scholz, P. (2005). *Echtzeit, Echtzeitsysteme, Echtzeitbetriebssysteme*, 39–73. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. URL [https://doi.org/10.1007/3-540-27522-3\\_3](https://doi.org/10.1007/3-540-27522-3_3).
- [120] Silva, J.M.S.; Villena, J.F.; Flores, P. und Silveira, L.M. (2007). *Scientific Computing in Electrical Engineering*, Kapitel Outstanding Issues in Model Order Reduction, 139–152. Springer Berlin Heidelberg.
- [121] Steiglitz, K. und McBride, L.E. (1965). A Technique for the Identification of Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-10(4), 461–464.
- [122] Stoten, D.P.; Lim, C.N. und Neild, S.A. (2007). Assessment of controller strategies for real-time dynamic substructuring of a lightly damped system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 221(2), 235–250.
- [123] Tamm, C. und Perfetto, S. (2019). Design and optimization of mechatronic systems using a holistic and parametric simulation approach. *IFAC-PapersOnLine*, 52(15), 271–276.
- [124] Tamm, C.; Bartel, T.; Dautfest, A.; Debes, C.; Herold, S. und Dsoki, C.E. (2016). Multi physical domain simulation of a NVH reduction system for a generator-electric vehicle . *INTER-NOISE 2016 45th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, 12.
- [125] Verein Deutscher Ingenieure (1993). Methodik zum Entwickeln und Konstruieren technischer Systeme und Produkte. VDI-Richtlinien. VDI 2221.
- [126] Verein Deutscher Ingenieure (2004). Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme. VDI-Richtlinien. VDI 2206.
- [127] Volkwein, S. (2013). Proper Orthogonal Decomposition: Theory and Reduced-Order Modelling. Lecture Notes.
- [128] Wagner, M. (2017). *Lineare und nichtlineare FEM*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden.
- [129] Weber, H. und Ulrich, H. (2012). *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.
- [130] Weile, D.S.; Grimme, E. und Gallivanb, K. (1999). A method for generating rational interpolant reduced order models of two-parameter linear systems. *Applied Mathematics Letters*, 12(5), 93–102.

- [131] Wittig, T. (2004). *Zur Reduzierung der Modellordnung in elektromagnetischen Feldsimulationen*. Dissertation, TU Darmstadt.
- [132] Wolter, S.; Franz, R.; Jungblut, T.; Möller, R. und Bruder, T. (2011). Aktive Anbindungsimpedanzen: Ein Anwendungsszenario echtzeitfähiger Lagermodelle. In *DVM-Workshop Elastomerbauteile*, 1–8.
- [133] Wörn, H. und Brinkschulte, U. (2005). *Echtzeitsysteme*. Springer-Verlag GmbH.
- [134] Wrobel, L.C. und Aliabadi, M.H. (2002). *The Boundary Element Method (Vol. 2)*. Wiley.
- [135] Zienkiewicz, O.C. und Taylor, R.L. (2000). *Finite Element Method: Volume 2, Fifth Edition*. Butterworth-Heinemann.
- [136] Zukunftsrat der Bayerischen Wirtschaft (2017). *Neue Wertschöpfung durch Digitalisierung - Analyse und Handlungsempfehlungen*.





# Eigene Arbeiten

## Begutachtete Veröffentlichungen

Tamm, C.; Perfetto, S. (2019): **Design and optimization of mechatronic systems using a holistic and parametric simulation approach**. IFAC PapersOn-Line, 52(15), 271–276.

Millitzer, J.; Mayer, D.; Henke, C.; Jersch, T.; Tamm, C.; Michael, J.; Ranisch, C. (2018): **Recent Developments in Hardware-in-the-Loop Testing**. In: MAC-XXXVI Conference and Exposition: It's Not Just Modal Anymore, Engineering Extremes: Unifying Concepts in Shock, Vibration, and Nonlinear Mechanics. USA: Orlando, Florida.

Tamm, C.; Bartel, T.; Dautfest, A.; Debes, C.; Herold, S.; Heim, R. (2016): **Multi physical domain simulation of a NVH reduction system for a generator-electric vehicle**. In: Deutsche Gesellschaft für Akustik, DEGA: 45th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, INTER-NOISE 2016. Deutschland: Hamburg, S. 12.

Tamm, C.; Stoll, G.; Herold, S. (2014): **Parametric Modeling of Main Excitation Sources on Board Vessels**. In: Sinha, J. (Hrsg.): Vibration Engineering and Technology of Machinery. Manchester, United Kingdom: Springer International Publishing, Vol 23. Auflage, S. 789–799. ISBN: 978-3-319-09917-0.

Tamm, C.; Kurch, M. (2013): **Modeling and Simulation of Main Engine Excitation on Board Vessels**. In: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE): V International Conference on Computational Methods in Marine Engineering (Marine 2013). Deutschland: Hamburg, 29. - 31.05.2013, S. 12.

## Beiträge in Fachzeitschriften

Tamm, C.; Revfi, S.; Thirunavukkarasu, D.; Timmer, A. (2020): **Methodik zur Identifizierung von Leichtbaulösungen in Fahrzeuganwendungen**. In: ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift. Wiesbaden, Deutschland: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Jahrg. 2020, Nr. 2. (noch nicht veröffentlicht)

Tamm, C. (2019): **Parametrische digitale Zwillinge für die Anwendung im Model-based Systems Engineering**. In: NAFEMS Online-Magazin. Jahrg. 53, Nr. 2/2020. ISSN: 2311-522X. (noch nicht veröffentlicht)

## Konferenzbeiträge

Hansmann, J.; Tamm, C.; Blago, A.; Gurram, S.K.; Stais, D. (2018): **Numerisch unterstützte Auslegung von Fahrradkomponenten am Beispiel von Griffen**. In: 7. Workshop des DVM Arbeitskreises Fahrradsicherheit. "Lastenfahrräder / Cargo Bikes". Deutschland: Ludwigsburg.

Tamm, C. (2018): **Efficient and Parametric Digital Twins for System Engineering Applications**. In: NAFEMS: Better Products with Model Based Systems Engineering (MBSE) and CAE. Deutschland: Wiesbaden, 14.-15.11.2018, S. 21–29. ISBN: 978-1-910643-16-7.

Millitzer, J.; Ranisch, C.; Tamm, C.; Bartolozzi, R.; Melz, T. (2017): **An approach for the design of a mechanical Hardware-in-the-Loop interface**. In: Symposium für Smarte Strukturen und Systeme 4SMARTS. Deutschland: Braunschweig.

Tamm, C.; Heissler, F.; d'Ippolito, R.; Motzer, M.; Panzeri, M.; Stöckl, F.; Stoll, G. (2016): **Development of a modelling approach for wire harnesses**. In: 34. Cadfem ANSYS Simulation Conference. Deutschland: Nürnberg, 5.-7.10.2016.

Tamm, C.; Thiel, J.; Bartel, T.; Atzrodt, H.; Herold, S. (2016): **Methodisches Vorgehen zur Auslegung des vibro-akustischen Verhaltens eines Fahrzeugs**. In: DLR, Fraunhofer LBF: 4SMARTS - Symposium für Smarte Strukturen und Systeme. Deutschland: Darmstadt, 06.-07.04.2016, S. 8.

Vrbata, J.; Mayer, D.; Röglin, T.; Buff, H.; Tamm, C.; de Rue, G.J. (2014): **Untersuchungen von verteilten adaptiven Maßnahmen zur Verringerung des von Schiffsantrieben verursachten Körperschalleintrags in den Schiffsrumpf**. In: 6. VDI Fachtagung für Maschinenakustik. Deutschland: Karlsruhe, S. 12.

Lippert, S.; Stritzelberger, B.; von Estorff, O.; Seiler, R.; Mathiowetz, S.; Barros, J.; Holbach, G.; Groß, J.; Bös, J.; Karger, M.; et al. (2014): **EPES: Effiziente Prognose vibroakustischer Eigenschaften in der Schiffsentwurfsphase FKZ 03SX305**. In: Statustagung Schifffahrt und Meerestechnik - Tagungsband der Statustagung 2014: Statustagung Schifffahrt und Meerestechnik 2014. Deutschland: Rostock, Forschungszentrum Jülich GmbH, Zentralbibliothek, Verlag, S. 15.

Tamm, C.; Kurch, M. (2013): **Determination of Rigid Body Inertia Properties of Combustion Engines based on measured Frequency Response Functions**. In: Deutsche Gesellschaft für Akustik (DEGA): AIA-DAGA 2013 Conference on Acoustics. Italien: Merano, 18. - 21.03.2013, S. 4.

Tamm, C.; Atzrodt, H.; Kurch, M. (2012): **Modellierung der Motoranregung zur vibroakustischen Prognose im Schiffbau**. In: Deutsche Gesellschaft für Akustik (DEGA): 38. Jahrestagung für Akustik (DAGA). Deutschland: Darmstadt, 19. - 22.03.2012, S. 2.

Tamm, C.; Kurch, M. (2011): **Application of model order reduction methods for vibro-acoustic ship design**. In: Graduate School of Computational Enginee-

ring (GSC CE): 2nd International Conference on Computational Engineering (ICCE 2011). Deutschland: Darmstadt, 05.10.2011.

## Fachvorträge

Tamm, C. (2018): **Optimization of dynamic systems using parametric order reduced models**. In: Alliance Future Lightweighting Day: Deutschland: Aachen.

Herold, S.; Tamm, C.; Matthias, M. (2017): **Methodische Entwicklung schwingungsreduzierender Maßnahmen an Schallquellen in Schiffen**. In: STG-Sprechtag. Deutschland: Bremen, 15.02.2017.

## Betreute Abschlussarbeiten

Gurram, S.K. (2018): **Evaluation of Bicycle Hand Grip under the considerations of Mechanics and Dynamic conditions**. Masterarbeit, Hochschule Kaiserslautern. Deutschland: Darmstadt.

Szczuka, S. (2018): **Implementierung und Analyse von Methoden zur Optimierung dynamischer Systeme unter Verwendung von parametrischen, ordnungsreduzierten Modellen**. Bachelorarbeit, Hochschule Darmstadt. Deutschland: Darmstadt.

Ranisch, C. (2017): **Entwurfsmethodik einer Hardware-In-The-Loop Schnittstelle zur Nachbildung mechanischer Randbedingungen**. Masterarbeit, Hochschule Darmstadt. Deutschland: Darmstadt.

Richter, F. (2017): **Analyse und Umsetzung einer Methode zur parametrischen Modellierung dynamischer Systeme auf der Basis ordnungsreduzierter Finite-Elemente-Modelle**. Masterarbeit, Hochschule RheinMain. Deutschland: Wiesbaden.

Potrafke, T. (2017): **Modellbildung dynamischer Systeme für die Anwendung in Signal-level-Hardware-in-the-Loop-Versuchseinrichtungen**. Masterarbeit, Technische Universität Darmstadt. Deutschland: Darmstadt.

Aulbach-Pries, P. (2017): **Umsetzung und Bewertung von Krylov-Unterraum- und Proper-Orthogonal-Decomposition-Methoden zur Ordnungsreduktion parametrischer Modelle**. Masterarbeit, Hochschule RheinMain. Rüsselsheim.

Topsakaloglu, F. (2013): **Modellierung und Simulation der Motoranregung in Schiffen**. Bachelorarbeit, Hochschule Darmstadt. Deutschland: Darmstadt.